

Série A, n° 832

N° d'ORDRE : 1629

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES.

PAR M. A. FOCH

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES COUPS DE BÉLIER DANS LES CONDUITES
MUNIES D'UN RÉSERVOIR D'AIR.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 avril 1920, devant la Commission d'examen.

MM. JEAN PERRIN, *Président.*

ABRAHAM, }
MAURAIN, } *Examineurs.*



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université.

14, RUE DES ARTS, 14 (SQUARE DU MUSÉE, TOULOUSE)

1920

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

<i>Doyen</i>	F. HOUSSAY, <i>Professeur</i> . Zoologie.
<i>Doyen honoraire</i>	P. APPELL, <i>Professeur</i> . Mécanique analytique et Mécanique céleste.
<i>Professeurs honoraires</i>	{ P. PUISEUX. VÉLAIN. BOUSSINESQ.
	LIPPMANN
	BOUTY
	E. PICARD
	Y. DELAGE
	Gaston BONNIER
	KOENIGS
	GOURSAT
	HALLER
	JOANNIS
	JANET
	WALLERANT
	ANDOYER
	PAINLEVÉ
	HAUG
	H. LE CHATELIER
	Gabriel BERTRAND
	M ^{me} P. CURIE
<i>Professeurs</i>	{ CAULLERY
	C. CHABRIÉ
	G. URBAIN
	Emile BOREL
	MARCHIS
	Jean PERRIN
	G. PRUVOT
	MATRUCHOT
	ABRAHAM
	CARTAN
	Cl. GUICHARD
	MOLLIARD
	LEBESGUE
	LAPICQUE
	GENTIL
	VESSIOT
	N.
	N.
	LEDOC
	HÉROUARD
	Léon BERTRAND
<i>Professeurs adjoints</i>	{ Rémy PERRIER
	COTTON
	LESPIEAU
	SAGNAC
	PÉREZ
<i>Secrétaire</i>	D. TOMBECK.

Série A, n° 832

N° d'ORDRE : 1629

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES.

PAR M. A. FOCH

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES COUPS DE BÉLIER DANS LES CONDUITES
MUNIES D'UN RÉSERVOIR D'AIR.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 avril 1920, devant la Commission d'examen.



MM. JEAN PERRIN, *Président.*

ABRAHAM, }
MAURAIN, } *Examineurs.*



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université.

14, RUE DES ARTS, 14 (SQUARE DU MUSÉE, TOULOUSE)

1920

A MA FEMME



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554011_0005

A MONSIEUR

C. CAMICHEL

Hommage reconnaissant.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES COUPS DE BÉLIER

DANS LES CONDUITES MUNIES D'UN RÉSERVOIR D'AIR

PAR M. A. FOCH

INTRODUCTION

I

[1] On appelle coups de bélier les variations de pression qui se produisent dans les conduites sous l'influence des changements de vitesse de l'eau, changements dus par exemple à l'ouverture d'une vanne, au fonctionnement d'un régulateur, etc. Les coups de bélier sont donc essentiellement *des phénomènes de transition* et ils ont donné lieu à la même classification que les phénomènes de transition électriques, avec lesquels nous aurons maintes fois l'occasion de les comparer.

Dans une première classe, on range les coups de bélier primitivement observés dans les conduites entièrement purgées d'air et qui sont la manifestation d'ondes se propageant avec une vitesse finie; ce pourquoi, ils ont été désignés sous le nom de *coups de bélier d'onde*. A la deuxième catégorie appartiennent les phénomènes généralement appelés *oscillations en masse* et qu'on observe toutes les fois que la dilatation de l'enveloppe et la compressibilité du liquide peuvent être négligées vis-à-vis des autres phénomènes; par exemple dans les conduites munies de cheminées d'équilibre, de réservoirs d'air, etc. Pour reprendre les comparaisons électriques, la première classe serait à rapprocher des oscillations des antennes, et la deuxième classe aurait son analogue dans les circuits oscillants. Mais, de même qu'il n'y a pas lieu de faire une distinction absolue entre les antennes et les circuits oscillants, de même la propagation par ondes et les oscillations en masse ont une seule et même cause : les variations de vitesse de l'eau en une région d'une conduite. Ces variations engendrent des ondes qui se propagent, se modifient sur les surfaces terminales de la conduite et finissent par se transformer en un véritable mouvement d'ensemble de l'eau contenue dans celle-ci, *lorsque ce mouvement est rendu possible par la présence d'une surface déformable* : surface libre du liquide débou-

chant dans un réservoir d'air ou dans une cheminée d'équilibre, piston d'un pare choc, etc. Il arrive souvent que le moment où le mouvement par ondes a disparu pour faire place au mouvement d'ensemble est si rapproché du début de la variation de vitesse que l'on ne peut nullement mettre le premier en évidence. Historiquement d'ailleurs, le mouvement d'ensemble a été défini et étudié par M. Rateau trois ans avant qu'Allievi ne mît en lumière le rôle de la propagation par ondes ⁽¹⁾. Néanmoins cette dernière est l'intermédiaire indispensable entre la variation de vitesse et le mouvement d'ensemble, *lequel est dû aux conditions aux limites imposées à un milieu susceptible de transmettre des ondes.*

[2] L'objet du présent travail est d'étudier les coups de bélier que l'on peut observer dans les conduites munies de réservoirs d'air, dont le volume, sans être assez grand pour masquer l'influence de la compressibilité de l'eau et de la dilatation de l'enveloppe, permet du moins certains déplacements des extrémités de la colonne liquide. On peut s'attendre à trouver — et on trouve effectivement — que, lorsque la poche d'air est extrêmement faible, les phénomènes présentent une grande analogie avec les coups de bélier observés dans les conduites entièrement purgées; inversement, de grands réservoirs d'air entraînent des oscillations se rapprochant des mouvements d'ensemble.

Toutefois la présence de la poche d'air entraîne des modifications assez particulières et dont l'intérêt pratique est grand, car la durée des périodes et la grandeur des surpressions sont fortement influencées. Ce sont ces points que je chercherai à mettre en évidence au cours de ce travail.

Dans le chapitre I, je résumerai les travaux d'Allievi en cherchant à préciser l'influence des conditions aux limites et je donnerai une généralisation de certains des résultats obtenus par Rateau dans l'étude du mouvement en masse.

Les deux façons d'envisager le problème étant ainsi indiquées, je me placerai, dans tout ce qui suivra, au point de vue du mouvement par ondes; dans le chapitre II, je ferai l'étude des débuts du coup de bélier dans les conduites munies d'une poche d'air. On verra comment les lois trouvées se raccordent suivant l'importance de la poche à la théorie d'Allievi ou aux résultats de Rateau.

Dans le chapitre III, j'étudierai les régimes permanents qui peuvent s'établir dans les conduites, surtout du fait des résonances.

[3] On trouvera dans tout ce qui suivra de nombreux rapprochements entre les phénomènes hydrauliques et les résultats obtenus principalement dans le domaine de l'électricité et éventuellement dans celui de l'acoustique. Dans ces ordres de

⁽¹⁾ Il convient de dire que Joukowski, deux ans avant Rateau et par suite cinq ans avant Allievi, avait indiqué les résultats fondamentaux de ce dernier. Mais son mémoire, publié en russe, semble être passé inaperçu.

questions, l'appareil mathématique est en effet souvent le même, et bien des résultats trouvés dans une branche peuvent, *mutatis mutandis*, être transférés dans les autres, sous réserve naturellement des vérifications expérimentales. Pour ne donner ici qu'un exemple, le problème de la déformation des coups de bélier dans les conduites à caractéristique variable admet une solution identique à celui de la propagation du son dans les tuyaux non cylindriques. Cela justifie des rapprochements qu'il ne faudrait d'ailleurs en aucune façon considérer comme des identifications.

II

[4] C'est pour moi un bien agréable devoir de remercier ici le Directeur de l'Institut électrotechnique de Toulouse, M. Camichel, qui, après m'avoir fourni l'idée première de ce travail et avoir mis à mon entière disposition les grandes ressources d'un laboratoire remarquablement outillé et doté, n'a cessé de s'intéresser aux progrès de mes recherches et de me prodiguer ses précieux conseils. Je tiens aussi à adresser mes remerciements à M. Eydoux, professeur suppléant à l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées, à qui je dois la communication de plusieurs renseignements d'ordre technique, et dont les suggestives remarques m'ont été fort utiles.

CHAPITRE PREMIER

[5] NOTATIONS. — Dans tout ce qui suivra, j'appellerai :

x la distance, mesurée le long de l'axe de la conduite, d'un point de cette conduite au distributeur, cette distance étant comptée positivement d'aval en amont ;

L la longueur de la conduite ;

g l'intensité de la pesanteur ;

v la vitesse en un point au temps t , le sens positif des vitesses étant dirigé de l'amont vers l'aval, opposé par suite au sens positif des x ;

p la « charge » au temps t ; cette « charge » sera souvent évaluée en mètres d'eau y ; p et y étant liés par la relation

$$p = \rho gy ;$$

ρ étant la masse spécifique de l'eau ;

h la pression atmosphérique, évaluée en mètres d'eau.

Je poserai aussi

$$z = y + h.$$

z sera donc la pression de l'air dans une poche située en un point de la conduite où la charge est y .

Les valeurs initiales des diverses quantités variables seront désignées en affectant de l'indice zéro les lettres correspondantes.

Propagation des ondes dans une conduite.

[6] Soit une conduite que nous supposerons d'abord horizontale, reliée à son extrémité amont à une chambre de mise en charge.

Soient, en un point, D le diamètre et e l'épaisseur de la conduite. Nous admettons que :

1) Le frottement intérieur de l'eau est négligeable, ainsi que les tourbillons que peut entraîner ce frottement.

2) En tous les points d'une même section de la conduite, la vitesse à un instant donné est dirigée parallèlement à l'axe et a la même grandeur.

3) Les dilatations de l'enveloppe de la conduite se font par tranches parallèles, agissant chacune pour son compte, sans s'influencer mutuellement. Cette hypothèse nous permettra de négliger les actions que pourraient exercer à distance les uns sur les autres, par l'intermédiaire des anneaux de la conduite, les tronçons sous-jacents de la colonne liquide (¹).

La théorie suivante due à Joukowski (²) et Allievi (³) n'est pas autre chose que l'application, à l'étude des coups de bélier, des résultats obtenus par Young (⁴) et Korteweg (⁵) pour la propagation du son dans les tuyaux.

C'est en somme l'examen, d'un point de vue industriel, de résultats de laboratoire.

Écrivons :

1) L'équation d'Euler

$$\frac{dp}{dx} = \rho \left[\frac{dv}{dt} - v \frac{dv}{dx} \right]; \quad (1)$$

2) L'équation de continuité : pour cela exprimons que la différence des volumes d'eau passant à travers deux sections distantes de dx est égal au volume d'eau emmagasiné par suite de la compressibilité de l'eau et de la dilatation de l'enveloppe.

On a ainsi :

$$\frac{dv}{dx} = \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{e} \frac{1}{E} \right] \frac{dp}{dt} = \frac{1}{a^2 \rho} \frac{dp}{dt} = \frac{g}{a^2} \frac{dy}{dt}, \quad (2)$$

en appelant ε le coefficient de compressibilité de l'eau, E le coefficient de l'élasticité de la conduite et en posant :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{e} \frac{1}{E} \right]. \quad (3)$$

Or v et $\frac{dv}{dx}$ sont faibles par rapport à $\frac{dv}{dt}$; on peut dès lors écrire les équations (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{g}{a^2} \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \quad (4)$$

(¹) Boussinesq, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1908), p. 8 et 81.

(²) Joukowski, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, 8^e série, tome IX, n° 5.

(³) Allievi, *Théorie générale du mouvement de l'eau dans les conduites*, *Revue de mécanique* (1904), p. 4.

(⁴) Young, *Phil. Trans.* (1808), II, p. 164-186.

(⁵) Korteweg, *Annalen der Physik* (1878), V, p. 5-25.

Ces équations sont bien connues : des différentiations évidentes les ramènent à l'équation des cordes vibrantes. Leurs intégrales sont :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + F_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - F_2\left(t + \frac{x}{a}\right), \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} \left[F_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + F_2\left(t + \frac{x}{a}\right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

équations qui montrent que les pressions y et les vitesses v résultent de la composition de deux ondes, l'une se déplaçant avec la vitesse a , l'autre avec la vitesse $-a$.

Si nous avons supposé que $\frac{dv}{dx}$ ne soit pas négligeable, mais ait une valeur constante et positive correspondant à la perte de charge dans le tuyau, la différentiation des équations

$$\frac{dv}{dt} + kv = g \frac{dy}{dx}$$

et

$$\frac{dv}{dx} = \frac{g}{a^2} \frac{dy}{dt}$$

aurait conduit à l'équation des télégraphistes; cette analogie peut être invoquée pour expliquer dans certains cas l'étalement des ondes. C'est d'ailleurs un point que je me borne à indiquer en raison de toutes les approximations que suppose déjà le fait d'écrire les équations (1) et (2).

Je renvoie au mémoire cité d'Allievi pour les transformations que l'on peut faire subir à la relation (3); je rappelle simplement que dans les conduites industrielles où e est de l'ordre du centimètre et D de l'ordre de plusieurs décimètres, a est de l'ordre de 1000 mètres par seconde.

[7] DÉFINITIONS. — On appelle *caractéristique* d'une conduite en une section d'aire σ où la vitesse de propagation des ondes est a , la quantité $\frac{a}{\sigma}$.

Si dans une conduite $\frac{a}{\sigma}$ est constant, on dit que la conduite est à *caractéristique unique*. C'est par exemple le cas d'une conduite constituée de tronçons ayant tous même nature, même épaisseur, même diamètre, cas que je supposerai toujours réalisé dans la suite de ce travail. On dit au contraire que la conduite est à *caractéristique variable* si $\frac{a}{\sigma}$ n'a pas la même valeur en toutes les sections. C'est le cas de la plupart des conduites forcées qui sont renforcées à l'extrémité aval, au moyen par exemple d'une augmentation d'épaisseur (').

(') Citons par exemple la conduite C_4 de l'usine de Soulom (Compagnie des Chemins de

Conditions aux limites.

[8] I. — On sait que les fonctions F_1 et F_2 se déterminent dans le cas le plus général au moyen des conditions aux limites. Nous admettons :

1) Qu'à l'extrémité amont de la conduite la pression est constante et égale à y_0 .
Donc à la chambre de mise en charge on a :

$$F_1\left(t - \frac{L}{a}\right) - F_2\left(t + \frac{L}{a}\right) = 0,$$

quel que soit t .

2) Qu'il n'y a pas de perte de charge dans la conduite; donc au distributeur

$$F_2(t) = F_1\left(t - \frac{2L}{a}\right).$$

C'est une première relation entre F_1 et F_2 imposée par la présence d'une chambre de mise en charge produisant une pression constante. On peut l'interpréter en disant que la perturbation se propage avec la vitesse a dans la conduite et se réfléchit en changeant de signe sur la chambre de mise en charge.

Cette relation nous permet de mettre les équations (5) sous la forme

$$\begin{aligned} y &= y_0 + F(t) - F\left(t - \frac{2L}{a}\right), \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} \left\{ F(t) + F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5')$$

Les équations (5') sont souvent appelées équations d'Allievi.

[9] II. — Le fonctionnement du distributeur impose une deuxième condition aux limites. Mais cet appareil intervenant pour modifier la vitesse de régime, c'est aux vitesses que cette condition est imposée. On est donc obligé, pour obtenir les variations de pression, seules intéressantes du point de vue pratique, de faire intervenir les relations complexes liant les vitesses aux pressions. C'est une difficulté du même ordre que l'on rencontre dans l'étude du mouvement des cordes de piano : Un marteau de masse M animé d'une certaine vitesse vient frapper une corde tendue,

fer du Midi); cette conduite est constituée par quinze tronçons ayant même diamètre intérieur (810 millimètres) et dont les épaisseurs varient de 7 millimètres à l'amont à 22 millimètres à l'aval.

Nous ne pouvons *a priori* rien dire sur les mouvements que prendront le marteau et la corde; nous sommes obligés, pour déterminer les déformations de la corde, d'écrire l'équilibre entre les forces d'inertie et les tensions engendrées par les déformations.

Je vais me borner à indiquer la solution dans un cas particulièrement simple, celui d'une conduite entièrement remplie et dont on ferme brusquement et complètement le distributeur au temps zéro.

A partir de cet instant, on a :

$$0 = v_0 - \frac{g}{a} \left[F(t) + F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \right].$$

On sait que, dans ce cas, la pression à l'extrémité aval prend les valeurs

$$y_1 = y_0 + \frac{av_0}{g} \quad \text{du temps } (2n-1)\frac{2L}{a} \quad \text{au temps } 2n\frac{2L}{a}$$

et

$$y_2 = y_0 + \frac{av_0}{g} \quad \text{du temps } 2n\frac{2L}{a} \quad \text{au temps } (2n+1)\frac{2L}{a}.$$

Le phénomène est donc périodique et de période :

$$T = \frac{4L}{a}. \quad (6)$$

Remarque. — Nous avons dit que dans la pratique a est voisin de 1000 m./sec.; g étant sensiblement égal à 10, le coup de bélier vaut donc sensiblement $100 v_0$.

En d'autres termes : le coup de bélier évalué en mètres d'eau est égal à la vitesse que l'on coupe évaluée en centimètres.

[10] III. — Enfin la présence d'une poche d'air permet souvent d'écrire une autre condition aux limites. Supposons cette poche intercalée sur la conduite : Soit v_1 la vitesse à l'amont de la poche; v_2 la vitesse à l'aval; la vitesse v avec laquelle l'eau se précipitera à l'intérieur est évidemment telle que

$$Sv = S_1 v_1 - S_2 v_2,$$

S , S_1 et S_2 désignant respectivement la section du tuyau joignant la poche à la conduite et les sections à l'amont et à l'aval.

Si

$$S = S_1 = S_2,$$

ce qui aura lieu souvent si on monte la poche sur un raccord en T, la relation (6) se réduit à

$$v = v_1 - v_2.$$

Or soient u et z le volume et la pression de l'air contenu dans la poche. On a d'abord

$$du = -Svdt.$$

Il faudrait donc avoir une relation entre u et z pour obtenir la loi de variation de u en fonction du temps. Or une telle relation est connue :

1) lorsque les compressions sont isothermes; on a alors :

$$uz = \text{Cte};$$

2) lorsque les compressions sont adiabatiques; on a alors :

$$\frac{C}{u^c} z = \text{Cte},$$

$\frac{C}{c}$ étant le rapport 1,41 des chaleurs spécifiques des gaz.

Nous *admettrons* donc — hypothèse que nous ferons souvent par la suite et qui nous servira surtout pour plier au calcul des phénomènes extrêmement complexes dont les véritables lois ne sont pas exactement connues — que les compressions de l'air ont lieu suivant la loi

$$nz^{\frac{1}{\gamma}} = a,$$

γ ayant une valeur comprise entre 1 et 1,41.

Dès lors nous écrirons

$$v_1 - v_2 = -\frac{\alpha}{S} \frac{d}{dt} \left\{ z^{\left(-\frac{1}{\gamma}\right)} \right\} = -\frac{u_0}{S} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\} \quad (7)$$

en appelant v_0 et z_0 le volume et la pression initiaux de la poche d'air.

Lorsque les surpressions seront petites, l'équation (7) prendra la forme

$$v_1 - v_2 = \frac{u_0}{S\gamma z_0} \frac{dz}{dt} = \frac{u_0}{S\gamma z_0} \frac{dy}{dt}. \quad (7')$$

II

[11] Avant d'aborder la question des petites poches d'air, je voudrais indiquer quelques-uns des résultats que l'on obtient lorsque l'on a affaire à des conduites de faible longueur pourvues de poches d'air de grand volume. M. Rateau ⁽¹⁾ a le premier donné une théorie approchée de ces phénomènes en se bornant au cas d'oscillations de faible amplitude. En me bornant au cas de conduites munies de poches d'air à l'extrémité aval et où l'on annule brusquement la vitesse de l'eau — telles sont par exemple les conduites forcées alimentant directement les presses à obus — je vais donner une méthode permettant de calculer les maximums et minimums de pression. Cette méthode paraît dans certains cas devoir être d'un maniement plus commode que celle de même principe indiquée par M. Camichel ⁽²⁾.

La colonne liquide, comprise entre deux sections droites voisines respectivement de l'extrémité amont et de l'extrémité aval, a une masse

$$\rho SL.$$

Admettons que la vitesse de l'eau soit à tout instant la même sur toute la longueur de la colonne liquide; soit v sa valeur à l'instant t ; la force d'inertie vaut à cet instant :

$$\rho SL \frac{dv}{dt}.$$

Les diverses forces qui agissent sur la colonne sont :

- 1) La pression $z_0 S \rho g$ exercée à l'extrémité amont et dirigée vers l'aval ;
- 2) La pression $-z S \rho g$ exercée par la poche d'air à l'extrémité aval et dirigée vers l'amont.

On a donc :

$$L \frac{dv}{dt} + g(z - z_0) = 0. \quad (8)$$

Remplaçons v par sa valeur tirée de (7), il vient :

$$-\frac{Lu_0}{S} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} + gz_0 \left[\frac{z}{z_0} - 1 \right] = 0. \quad (9)$$

⁽¹⁾ *Revue de Mécanique* (1900), VI, p. 539-561.

⁽²⁾ *Revue générale de l'Électricité* (1917), I, p. 723.

Posons

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = \eta$$

ou

$$\frac{z}{z_0} = \eta^{-\gamma}.$$

La relation (9) devient

$$\frac{Lu_0}{z_0 Sg} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \eta^{-\gamma} - 1 = 0. \quad (10)$$

Multipliant par $\frac{d\eta}{dt}$ les deux membres de (10) et intégrant par rapport au temps, il vient en supposant d'abord $\gamma \neq 1$

$$\frac{-2u_0}{2z_0 Sg} \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{1-\gamma} \eta^{1-\gamma} - \eta = \text{Cte}. \quad (11)$$

La valeur de la constante s'obtient en écrivant que, lorsque $z = z_0$, $\frac{d\eta}{dt}$ prend la valeur définie par

$$v_0 = -\frac{u_0}{S} \frac{d\eta}{dt}.$$

D'où

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_{\eta=1} = -\frac{Sv_0}{u_0},$$

l'équation (11) devient :

$$\frac{-Lu_0}{2z_0 Sg} \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{1-\gamma} (\eta^{1-\gamma} - 1) - (\eta - 1) = \frac{LSv_0^2}{2u_0 z_0 g}. \quad (12)$$

Cette équation ne peut être intégrée complètement au moyen de fonctions élémentaires, mais il est possible de l'utiliser pour obtenir les valeurs maximum et minimum de z : il suffit en effet d'écrire que

$$\frac{d\eta}{dt} = 0.$$

On obtient ainsi :

$$\frac{1}{\gamma-1} (\eta^{1-\gamma} - 1) + \eta - 1 = \frac{LSv_0^2}{2u_0 z_0 g}. \quad (13)$$

Équation transcendante qu'il est aisé de résoudre graphiquement.

Remarquons en effet que le premier membre est uniquement fonction de η , et

par suite de $\frac{z}{z_0}$. Nous pouvons dès lors tracer la courbe qui a pour abscisses les rapports $\frac{z}{z_0}$ de la pression à l'instant t à la pression statique et pour ordonnées :

$$z_1 = \frac{1}{\gamma - 1} (\gamma^{1-\gamma} - 1) + \gamma - 1.$$

Cette courbe pourra nous servir pour toutes les conduites à caractéristique unique. Les abscisses de l'intersection de cette courbe avec la parallèle à l'axe des abscisses, d'ordonnée $\frac{LSv_0^2}{2u_0z_0g}$ donnent les valeurs de $\frac{z}{z_0}$ correspondant au maximum et au minimum de pression. Je désignerai respectivement par $\left(\frac{z}{z_0}\right)_{\gamma_0}^m$ et par $\left(\frac{z}{z_0}\right)_{\gamma_0}^m$ les valeurs de $\frac{z}{z_0}$ correspondant au maximum et au minimum de pression pour la valeur γ_0 de γ .

Si la compression était isotherme, la forme *algébrique* de l'équation (12) se trouverait modifiée; on trouve en effet, quand $\gamma = 1$:

$$\frac{Lu_0}{2Sz_0g} \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 + \log_e \gamma - \gamma - 1 = \frac{-LSv_0^2}{2u_0z_0g}. \quad (13')$$

Mais la forme géométrique de la courbe ayant pour abscisses $\frac{z}{z_0}$ et pour ordonnées :

$$z_2 = \log_e \gamma - \gamma - 1$$

ressemble beaucoup à celle de la courbe que nous avons définie plus haut pour

$$\gamma \neq 1.$$

On peut s'en rendre compte sur la figure 1, où j'ai porté

1) la courbe d'abscisses $\frac{z}{z_0}$ et d'ordonnées z_2 (Courbe A);

2) la courbe ayant pour abscisses $\frac{z}{z_0}$ et pour ordonnées les valeurs correspondantes de z_1 évaluées dans l'hypothèse $\gamma = 1,41$ (Courbe B).

On voit aussi que la deuxième courbe enveloppe complètement la première, et que par suite on a :

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)_{1,41}^m < \left(\frac{z}{z_0}\right)_1^m < \left(\frac{z}{z_0}\right)_1^m < \left(\frac{z}{z_0}\right)_{1,41}^m.$$

La façon dont on a obtenu ces valeurs maximum et minimum de la pression permet une remarque sur le rôle joué par les réservoirs d'air comme amortisseurs.

Si en effet on augmente le volume u_0 de la poche d'air, on rapproche la droite $z_s = \frac{LSv_0^2}{2u_0z_0g}$ de l'axe des abscisses; par suite on diminue le maximum et on augmente le minimum de pression pendant l'oscillation. En d'autres termes, on diminue la grandeur et l'amplitude des coups de bélier. Inversement, si on augmente dans la conduite la vitesse de régime, il faut, si on veut maintenir le coup de bélier dans les mêmes limites, accroître aussi le volume du réservoir d'air, et les formules

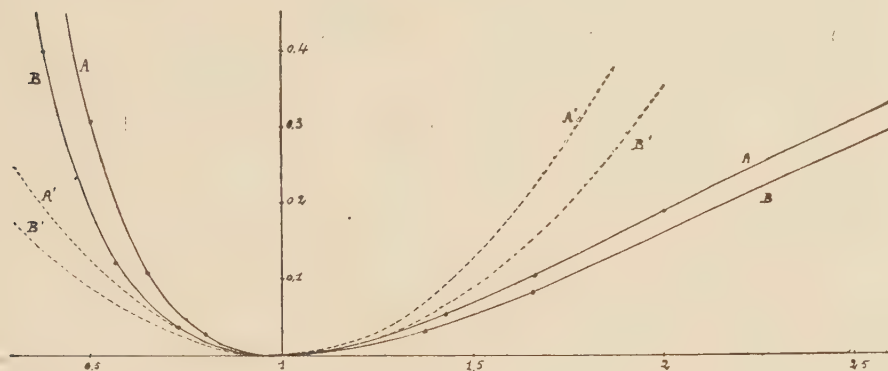


FIG. 1.

précédentes montrent que, pour obtenir l'effet cherché, ce volume doit croître comme le carré de la vitesse.

Remarque importante. — Il existe une interprétation très simple de la quantité figurant dans le second membre des équations (13) et (13'). $\rho \frac{LSv_0^2}{2}$ représente en effet l'énergie cinétique de l'eau contenue dans la conduite; ρgu_0z_0 est le travail nécessaire pour injecter un volume d'air u_0 dans une poche où règne une pression $z_0\rho g$. L'équation (13) [ou ses cas particuliers (13') et (14)] définit donc les pressions maximum et minimum d'une masse d'air occupant le volume u sous la pression z_0 et qui absorbe ou restitue une quantité d'énergie égale à $\frac{1}{2}\rho LSv_0^2$.

Nous utiliserons cette remarque au chapitre III.

[12] Dans le cas de petites oscillations, les formules précédentes se simplifient. Si on tient compte en effet de la relation de définition

$$\frac{z}{z_0} = \gamma_1^{-\gamma},$$

on peut écrire l'équation (13)

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{z^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{z_0} - 1 \right] + \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} - 1 = \frac{LSv_0^2}{2u_0 z_0 g} \quad (14)$$

Posons

$$\frac{z}{z_0} = 1 + \zeta,$$

ce qui revient à représenter la surpression par ζz_0 ; il vient, en développant en série et en limitant les développements au deuxième ordre,

$$\frac{LSv_0^2}{2u_0 z_0 g} = \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \zeta - \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2} \zeta^2 \right] + \left[-\frac{1}{\gamma} \zeta + \frac{1}{2\gamma} \frac{1 + \gamma}{\gamma} \zeta^2 \right] = \frac{\zeta^2}{2\gamma}.$$

On retrouve la formule de Rateau :

$$z - z_0 = v_0 \sqrt{\frac{LSz_0 \gamma}{gu_0}}.$$

Un développement en série analogue appliqué à la relation (13') redonne la même formule avec $\gamma = 1$.

Pour établir cette formule, M. Rateau était parti de l'hypothèse que les mouvements de l'eau sont assez petits pour que l'on puisse écrire

$$v_0 = \frac{u_0}{S\gamma} \frac{d\zeta}{dt}.$$

au lieu de

$$v = \frac{u_0}{S} \frac{d}{dt} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

La relation (10) s'écrit alors

$$\frac{Lu_0}{S\gamma z_0} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + g(\zeta - 1) = 0.$$

D'où on déduit, comme plus haut,

$$\frac{Lu_0}{2Sz_0 g} \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\zeta^2}{2} - \zeta \right) = \text{Cte.}$$

On obtient les maximums et les minimums de pressions par l'intersection de la droite d'ordonnée

$$\frac{LSv_0^2}{2gu_0 z_0}$$

avec la parabole

$$\frac{1}{2\gamma} \left(\frac{z}{z_0} - 1 \right)^2$$

que j'ai tracée en pointillé sur la figure 1 pour les valeurs 1 et 1,41 de γ : l'inspection de cette figure montre que la formule de Rateau donnera des maximums et des minimums trop faibles.

[13] Je vais utiliser pour la justification expérimentale de la méthode précédente les résultats donnés par M. Camichel dans l'article déjà cité.

En utilisant une conduite pour laquelle on avait

$$L = 18,36 \text{ m.} \quad S = 50 \text{ cm}^2 \quad z_0 = 15,5 + 10,1 \text{ m.}$$

$$v_0 = 6,224 \text{ m./sec.} \quad u_0 = 490 \times \frac{10,1}{25,6} \text{ cm}^3,$$

cet auteur a trouvé pour valeurs maximum et minimum de la pression

$$z_M = 36,75$$

$$z_m = 19,05.$$

Or la méthode précédente donne :

	$\left(\frac{z}{z_0} \right)^M$	$\left(\frac{z}{z_0} \right)^m$
Calculé pour $\left\{ \begin{array}{l} \gamma = 1 \\ \gamma = 1,41 \end{array} \right.$	1,465	0,70
	1,40	0,745
Observé.	1,435	0,745

Une autre expérience avec la même conduite, expérience où l'on avait

$$v_0 = 0,190 \text{ m./sec.} \quad u_0 = 720 \frac{10,1}{25,6} \text{ cm}^3$$

a donné

$$z_M = 32,75 \text{ m.} \quad z_m = 20,67 \text{ m.}$$

La méthode précédente donne :

	$\left(\frac{z}{z_0}\right)^m$	$\left(\frac{z}{z_0}\right)^m$
Calculé pour	$\gamma = 1$	1,25
	$\gamma = 1,41$	0,815
Observé	1,26	0,809

La concordance est donc satisfaite en raison :

- 1) des hypothèses mises à la base du calcul;
- 2) des complications que peut apporter la dissolution de l'air de la poche dans l'eau de la conduite. D'une part en effet il y a dissolution continue de l'air sous pression dans l'eau qui était quelque temps auparavant au contact de l'air atmosphérique, de sorte que le volume mesuré à la fin de l'expérience peut n'avoir aucun rapport avec celui qui est intervenu dans les oscillations d'ensemble. En second lieu, si au contact de l'air de la poche nous avons de l'eau presque saturée en air sous la pression statique, cette eau tendra, lors des surpressions, à dissoudre de nouvelles quantités d'air et inversement, au moment des dépressions, l'air dissous tendra à se dégager; il y aurait donc en somme une tendance à la régularisation des pressions. Or le fait que la théorie précédente rend compte des phénomènes semblerait prouver que ces phénomènes de dissolution s'effectuent assez lentement pour ne pas changer le régime que nous avons étudié. Il y a là d'ailleurs un point qui serait à élucider.

CHAPITRE II

J'ai, dans le chapitre précédent, indiqué le principe des deux méthodes jusqu'à présent employées dans l'étude des coups de bélier. Je vais, en me plaçant au point de vue d'Allievi, étudier certains des phénomènes de transition présentés par les conduites où le volume des réservoirs d'air, sans être assez grand pour masquer l'influence de la compressibilité du liquide et de la dilatation de l'enveloppe, permet du moins un certain mouvement d'ensemble de la colonne liquide. Dans la partie théorique, je me bornerai à indiquer par un exemple la façon d'aborder les calculs, ceux-ci devenant rapidement tellement compliqués qu'il est préférable de s'en rapporter à l'expérience directe toutes les fois que cette dernière est possible.

I

[14] Le principe de la méthode employée est le suivant :

Il est d'abord évident que l'on peut se borner à déterminer la fonction $F(t)$ au distributeur; car les relations

$$y = y_0 + F\left(t + \frac{l-x}{a}\right) - F\left(t - \frac{l-x}{a}\right),$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a} \left[F\left(t + \frac{l-x}{a}\right) + F\left(t - \frac{l-x}{a}\right) \right]$$

donneront les pressions et les vitesses pour tous les points de la conduite.

Or au distributeur les équations d'Allievi donnent :

$$y = y_0 + F(t) - F\left(t - \frac{2L}{a}\right),$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a} \left[F(t) + F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \right].$$
(1)

Donc

$$y + \frac{av}{g} = y_0 + \frac{a}{g} v_0 - 2F\left(t - \frac{2L}{a}\right);$$
(2)

Si donc nous avons :

1) une relation entre y et v au distributeur;

2) la fonction $F(t)$ pour un intervalle de temps allant de t_1 à $t_1 + \frac{2L}{a}$, l'équation (2) définira y en fonction du temps pendant l'intervalle $\left(t_1 + \frac{2L}{a}, t_1 + \frac{4L}{a}\right)$.

La première des équations (1) nous donnera alors $F(t)$ pour le même intervalle. On pourra ainsi de proche en proche calculer y .

Or on connaît $F(t)$ pendant le temps antérieur à $t = 0$, où elle est identiquement nulle. Par suite on pourra, sous la réserve qu'on connaîtra exactement la relation entre y et v , calculer $F(t)$ pour une époque quelconque en passant par l'intermédiaire des intervalles successifs

$$\left(0, \frac{2L}{a}\right)$$

que j'appellerai premier intervalle (désigné souvent sous le nom de coup de bélier direct),

$$\left(\frac{2L}{a}, \frac{4L}{a}\right)$$

que j'appellerai deuxième intervalle (appelé parfois contre-coup de bélier),

$$\left(\frac{4L}{a}, \frac{6L}{a}\right)$$

que j'appellerai troisième intervalle,

$$\left(2(n-1)\frac{L}{a}, 2n\frac{L}{a}\right)$$

que j'appellerai n^{me} intervalle.

Cas d'une poche d'air située à l'extrémité aval.

[15] A) PETITES OSCILLATIONS. — Nous allons d'abord supposer que les oscillations sont d'amplitude assez petite pour que l'on puisse écrire la relation

$$v = \frac{u_0}{S\gamma z_0} \frac{dz}{dt} = \frac{g}{a\lambda} \frac{dy}{dt}$$

en posant

$$\lambda = \frac{g}{a} \frac{S\gamma z_0}{u_0}, \quad (3)$$

S désignera la section de l'ajutage reliant la poche à la conduite, section que nous supposerons être celle de la conduite.

[16] ÉTUDE DU PREMIER INTERVALLE. — $F\left(t - \frac{2L}{a}\right)$ étant identiquement nul, l'équation (2) prend la forme :

$$y_0 + \frac{a}{g} v_0 = y_1 + \frac{a}{g} v_1 = y_1 + \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{dt}; \quad (2')$$

équation dont l'intégrale est, en tenant compte des conditions initiales $y_1 = y_0$, $v_1 = v_0$,

$$y_1 = y_0 + \frac{av_0}{g} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Par suite :

1) la pression tend vers la valeur $y_m = y_0 + \frac{av_0}{g}$ sans l'atteindre pendant le premier intervalle, résultat qui sera plus loin [§ 21] étendu au cas d'oscillations de grande amplitude.

2) Si λ est très grand — ceci ayant lieu par exemple lorsque u_0 est petit — au bout de très peu de temps la surpression ne sera pour ainsi dire pas différente de la valeur $\frac{av_0}{g}$ résultant de l'application de la théorie d'Allievi à la conduite entièrement purgée. Si par exemple on a une conduite reliée par un ajutage de 50 cm² de section à une poche d'air de 25,3 cm sous une charge de 10 mètres d'eau, on a : $\lambda = 20$.

Au bout de 1/4 de seconde la surpression est $0,9933 \frac{av_0}{g}$.

3) La valeur de la fonction $F(t)$ pour le premier intervalle est

$$\frac{av_0}{g} (1 - e^{-\lambda t}).$$

[17] ÉTUDE DU DEUXIÈME INTERVALLE. — Il nous sera utile, pour les calculs qui vont suivre, d'utiliser des équations réduites, qui nous permettront d'éviter de traîner dans les calculs des symboles inutiles et feront plus aisément ressortir certains points.

Nous poserons

$$\frac{y - y_0}{\frac{av_0}{g}} = \chi$$

et nous désignerons par τ une variable croissant dans chaque intervalle

$$\left(\frac{2nL}{a}, \frac{2(n+1)L}{a} \right)$$

depuis zéro jusqu'à $\tau_1 = \frac{2\lambda L}{a}$. Nous poserons pour cela :

Pour le second intervalle,

$$\tau = \lambda \left(t - \frac{2L}{a} \right);$$

pour le troisième intervalle,

$$\tau = \lambda \left(t - \frac{4L}{a} \right);$$

pour le n^{me} intervalle,

$$\tau = \lambda \left[t - (2n-1) \frac{L}{a} \right].$$

Enfin nous poserons

$$F(t) = \frac{av_0}{g} G(t)$$

et nous représenterons par $G_n(\tau)$ la valeur de $G(t)$ pendant le n^{me} intervalle.

L'avantage de cette notation est principalement le suivant : Si on a déterminé $F_n(\tau)$,

le produit $\frac{av_0}{g} G_n(\tau)$ est la fonction $F \left(t - \frac{2L}{a} \right)$ relative au $(n+1)$ intervalle.

Avec ces notations, l'équation (2) s'écrit, pour le n^{me} intervalle,

$$Y_n + \frac{dY_n}{d\tau} = 1 - 2G_{n-1}(\tau). \quad (4)$$

Par suite, pour la seconde période où

$$G_1(\tau) = 1 - e^{-\tau},$$

on a :

$$Y_2 + \frac{dY_2}{d\tau} = -1 + 2e^{-\tau},$$

équation dont l'intégrale générale est

$$Y_2 = -1 + k_2 e^{-\tau} + 2\tau e^{-\tau}.$$

On détermine la constante k_2 en écrivant que la pression finale du premier intervalle est égale à la pression initiale du second

$$1 - e^{-\tau_1} = k_2 - 1.$$

Par suite,

$$Y_2 = -1 + (2 - e^{-\tau_1})e^{-\tau} + 2\tau e^{-\tau}.$$

Écrivant

$$Y_2 = \underbrace{(1 - e^{-\tau_1})e^{-\tau} + 2\tau e^{-\tau}}_{G_2(\tau)} - \underbrace{(1 - e^{-\tau})}_{G_1(\tau)},$$

on voit que l'on a :

$$G_s(\tau) = (1 - e^{-\tau_1})e^{-\tau} + 2\tau e^{-\tau}.$$

MAXIMUM DE LA PRESSION PENDANT LE SECOND INTERVALLE. — Prenons la dérivée $\frac{dY_s}{d\tau}$ proportionnelle à $\frac{dy}{dt}$.

On trouve :

$$\frac{dY_s}{d\tau} = e^{-\tau} \left[e^{-\tau_1} - 2\tau \right].$$

La dérivée s'annule en passant du positif au négatif pour

$$2\tau = e^{-\tau_1}.$$

Ce changement aura lieu pendant le second intervalle si

$$e^{-\tau_1} < 2\tau_1.$$

L'équation

$$e^{-x} = 2x,$$

ayant comme racine

$$x = 0,35,$$

il faudra que l'on ait

$$0,35 < \tau_1 = \frac{2L}{a} \times \lambda = \frac{2Sg\gamma z_0 L}{a^3 u_0},$$

$$u_0 < \frac{2}{0,35} \frac{Sg\gamma z_0 L}{a^3}.$$

Par suite, pour une conduite dans laquelle l'ajutage reliant la poche à la conduite a une section de 50 cm² et où l'on a

$$L = 183 \text{ m.}, \quad z_0 = 27,3 \text{ m.}, \quad a = 1300 \text{ m/s},$$

le volume minimum pour lequel le maximum de surpression n'aura sûrement pas lieu pendant le second intervalle sera obtenu en prenant

$$\gamma = 1,41,$$

Ce volume est égal à 1230 cm³ à la pression de 27,3 m. d'eau, soit 3320 cm³ à la pression atmosphérique.

Lorsque le maximum se produit pendant la seconde période, sa valeur est telle que

$$Y_s^{(m)} = \frac{y - y_0}{\frac{av_0}{g}} = -1 + 2e^{-\tau}.$$

Par suite,

Si la surpression atteint un maximum pendant le second intervalle, ce maximum est encore inférieur à $\frac{av_0}{g}$.

[18] ÉTUDE DU TROISIÈME INTERVALLE. — Dans le troisième intervalle où $\tau = \left(t - \frac{4L}{a}\right)$, l'équation (3) s'écrit :

$$y_3 + \frac{dy_3}{d\tau} = 1 - 2[(1 - e^{-\tau_1})e^{-\tau} + 2\tau e^{-\tau}]. \quad (5)$$

D'où

$$y_3 = k_3 e^{-\tau} + 1 - 2[\tau(1 - e^{-2\tau_1}) + \tau^2]e^{-\tau}.$$

On obtient la constante k_3 en écrivant qu'au début de la troisième période on a

$$y_2 = y_3.$$

D'où

$$k_3 + 1 = -1 + (2 - e^{-\tau_1})e^{-\tau_1} + 2\tau_1 e^{-\tau_1}.$$

Par suite

$$y_3 = 1 + e^{-\tau} \left\{ -2 + (2 - e^{-\tau_1})e^{-\tau_1} + 2\tau_1 e^{-\tau_1} - 2\tau(1 - e^{-\tau_1}) + 2\tau^2 \right\}. \quad (6)$$

Donc

$$G_3(\tau) = 1 + e^{-\tau} [-1 + e^{-\tau_1} - e^{-2\tau_1} + 2(\tau_1 + \tau)e^{-\tau_1} - 2\tau^2].$$

[19] ÉTUDE DU QUATRIÈME INTERVALLE. — Dans le quatrième intervalle où $\tau = t - \frac{6L}{a}$, on a :

$$y_4 = -1 + k_4 e^{-\tau} + 2e^{-\tau} \left\{ \tau[1 - e^{-\tau_1} + e^{-\tau_1} - 2\tau_1 e^{-\tau_1}] - \tau^2 e^{-\tau_1} + \frac{2\tau^3}{3} \right\} \quad (7)$$

avec

$$k_4 = 1 + y_3^{(1)}.$$

$y_3^{(1)}$ désignant la valeur de y_3 pour $T = T_1$.

Je ne pousse pas les calculs plus loin; ce qui précède suffit à montrer d'une part la marche générale des opérations, d'autre part la complication rapide des calculs, dès qu'on essaie d'aborder les intervalles relativement éloignés du moment de la fermeture. Je me borne simplement à signaler que lorsque le volume de la poche d'air est assez petit, on peut avoir pendant le quatrième intervalle une surpression supérieure à $\frac{av_0}{g}$. Une conduite calculée pour résister à la première surpression pourra claquer, s'il s'est formé près du distributeur une poche d'air.

Si le volume d'air est petit, $e^{-\tau_1}$ est extrêmement faible. C'est ainsi par exemple que dans la conduite dont j'ai donné plus haut les caractéristiques, pour une poche de 30 cm^3 , on a :

$$\tau_1 = 1,9, \quad e^{-\tau_1} = 4,54 \times 10^{-5}.$$

Dans ces conditions, on a très sensiblement

$$\begin{aligned} y_3^{(4)} &= 1, & k_4 &= 2, \\ y_4 &= -1 + 2e^{-\tau} \left[1 + \tau + \frac{2\tau^3}{2} \right], \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= -2e^{-\tau} \tau \left[1 - 2\tau + \frac{2\tau^3}{3} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

La dérivée s'annule pour

$$\begin{cases} T' = 0 \\ T'' = 0,635 \\ T''' = 2,37 \end{cases}$$

Par suite, il y a :

- 1) un maximum égal à 1 au début du quatrième intervalle;
- 2) un minimum égal à 0,83 pour $T'' = 0,635$;
- 3) un maximum égal à 1,26 pour $T''' = 2,37$.

Ainsi, après avoir baissé pendant un laps de temps très court, la pression remonte jusqu'à dépasser d'un quart $y_0 + \frac{av_0}{g}$, puis retombe très vite à une valeur voisine de $y_0 - \frac{av_0}{g}$.

Un résultat analogue, mais reposant sur l'hypothèse que le maximum de pression est atteint pendant le premier intervalle, avait été énoncé par de Sparre ⁽¹⁾.

Voici les conclusions de cet auteur :

« On voit que dans les conditions où nous sommes placés et qui sont, il est vrai, les plus défavorables, la présence de l'air peut plus que doubler la valeur du coup de bélier à l'endroit où il se trouve. Toutefois c'est en réalité un maximum, les conditions supposées n'étant pas en général complètement réalisées. Ce résultat n'en montre pas moins la grande utilité des dispositions destinées à empêcher l'accumulation de l'air en un point de la conduite. »

Si l'hypothèse, mise nettement par M. de Sparre à la base de son raisonnement, ne semble pas devoir être toujours admise, ce qui précède suffit à montrer que les conclusions subsistent, au moins qualitativement.

(1) De Sparre, *Houille blanche* (1912), p. 316.

[20] *Remarques.* — 1) Le calcul précédent suppose que $e^{-\tau_1}$ est négligeable et ne suppose rien sur la grandeur de $\frac{2L}{a}$; or les intervalles de temps

$$\theta_1 = \frac{\tau'' - \tau'}{\lambda} = \frac{0,635}{\lambda},$$

$$\theta_2 = \frac{\tau''' - \tau''}{\lambda} = \frac{2,37}{\lambda}$$

séparant du début de l'intervalle le minimum et le second maximum de pression, peuvent si λ est très grand (ou u_0 très petit) être tellement rapprochés du début de la période que l'enregistreur ne pourra pas suivre et se bornera à inscrire la pression moyenne pendant un certain intervalle. Or l'équation (8) montre que dans ces hypothèses la pression retombe très vite à une valeur extrêmement voisine de -1 . En d'autres termes, pour des poches de volume très faible de l'ordre du cm^3 , on ne verra pas de grands à-coups de pression, on n'apercevra que de petites dentelures dans les courbes d'enregistrement.

Il n'est d'ailleurs nullement certain que ces grands à-coups se produisent dans la réalité, car si le volume tombe au-dessous d'une certaine valeur, la condition aux limites qui se traduit par

$$v = \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{dt}$$

ne peut plus prétendre représenter la réalité des phénomènes.

2) Il est aisé de vérifier que, si τ_1 reste petit, voisin par exemple de 1, la courbe de surpressions conserve une forme régulière et cesse de présenter les pointes précédentes.

Poche d'air à l'extrémité aval (*suite*).

[21] B) OSCILLATIONS DE GRANDE AMPLITUDE. — Si maintenant on essaie de s'affranchir de l'hypothèse d'après laquelle les oscillations n'ont qu'une faible amplitude, les calculs sont tout de suite impossibles à effectuer, et on doit se borner à traiter séparément chaque cas particulier.

Je vais en conséquence indiquer seulement comment on peut établir d'une façon générale le théorème indiqué au paragraphe 16 (*).

Les équations d'Allievi relatives au premier intervalle s'écrivent, dans le cas d'une fermeture brusque et complète :

(*) Voir, pour le principe des calculs, Allievi, *loc. cit.*, p. 252; Joukowski, *loc. cit.*, p. 56.

$$y = y_0 + F(t),$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a} F(t).$$

D'où

$$v = \frac{g}{a} (y_M - y) = \frac{g}{a} (z_M - z)$$

en posant

$$z_M = h + y_0 + \frac{av_0}{g}.$$

Équation qui, en vertu de la relation

$$v = -\frac{\alpha}{S} \frac{d}{dt} z^{\left(-\frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha}{S\gamma} z^{\left(-\frac{1}{\gamma} + 1\right)} \frac{dz}{dt},$$

donne

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S\gamma g}{a\alpha} (z_M - z) z^{\frac{1}{\gamma} + 1},$$

$$t = \frac{a\alpha}{S\gamma g} \int \frac{dz}{(z_M - z) z^{\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)}}.$$

Mettons $\frac{1}{\gamma} + 1$ sous la forme d'une fraction $\frac{p}{q}$; par exemple, si $\gamma = 1$, on aura :
 $p = 2$, $q = 1$.

Si $\gamma = 1,41$, on aura : $p = 241$, $q = 141$.

Posons

$$z^{\frac{p}{q}} = \zeta^p.$$

On aura :

$$z = \zeta^q.$$

En posant aussi

$$z_M = \zeta_M^q, \quad z_0 = \zeta_0^q,$$

on aura la relation

$$t = \frac{a\alpha}{S\gamma g} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{q\alpha\zeta}{(\zeta_M^q - \zeta^q) \zeta^{p-q+1}},$$

où p et q sont des entiers.

Si on développe en fractions élémentaires la quantité

$$\frac{1}{\zeta^{p-q+1} (\zeta_M^q - \zeta^q)},$$

on trouve :

1) des termes de la forme $\frac{1}{\zeta^v}$ qui donneront des termes finis quand on intégrera depuis ζ_0 jusqu'à $\zeta > 0$;

2) des termes de la forme $\frac{1}{1 + \xi^2}$, ξ^2 étant le produit de deux racines imaginaires conjuguées de l'équation $\xi_m^2 - \xi^2 = 0$; là encore l'intégration de ξ_0 à ξ donnera des termes finis;

3) Enfin un terme $\frac{1}{\xi_m - \xi}$ qui deviendra infini lorsque ξ tendra vers ξ_m ou, ce qui revient au même, lorsque y tendra vers $y_m = y_0 + \frac{av_0}{g}$.

En d'autres termes, il faudrait un temps infini pour que la surpression à l'aval d'une conduite munie d'une poche d'air près du distributeur atteigne la valeur $y_0 + \frac{av_0}{g}$, que l'on peut obtenir dans un temps fini quand la conduite est *entièrement purgée*. La surpression ne peut donc jamais atteindre $\frac{av_0}{g}$ pendant le premier intervalle. C'est le point que je voulais établir.

Supposons maintenant intégrée l'équation (1) : on peut tracer la courbe (y, t) et trouver ainsi, au moins numériquement, la fonction $F(t)$ relative au premier intervalle.

Soit $F_1(t)$ cette fonction.

On aura pour le deuxième intervalle

$$y - y_m + \frac{ax}{S\gamma g} \frac{dt}{d} (y + h)^{\frac{1}{\gamma} + 1} = -2F_1(t),$$

équation qu'il ne paraît pas possible d'intégrer par les méthodes élémentaires.

En présence de pareils calculs, nous allons nous borner à une étude expérimentale du phénomène.

Étude expérimentale du phénomène.

[22] A) DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL. — a) *Conduites*. — J'ai utilisé pour l'étude des phénomènes présentés par les conduites munies de poches d'air une conduite montée à l'Institut électrotechnique et dont la longueur varia suivant les expériences entre 182,20 et 186,10 mètres. Elle était constituée par des tubes en fer du commerce du type dit 80-90 (*), reliés entre eux par des manchons dont chacun portait, sur sa génératrice supérieure, un trou taraudé que l'on pouvait obturer par une vis. Les divers joints étaient rendus étanches par du chanvre suifé ou cérusé.

J'ai employé pour former le tronçon aval de la conduite plusieurs bouts de tube ayant comme caractère commun d'être munis :

- 1) de raccords pour les indicateurs,

(*) Ces deux nombres sont respectivement le diamètre intérieur et le diamètre extérieur évalués en millimètres. La section intérieure valait donc 50 cm².

2) de robinets de différentes formes ou grandeurs, placés en bout de la conduite ou latéralement. Ces robinets représentaient l'équivalent du distributeur industriel.

La chambre de mise en charge était constituée par un réservoir de 3 mètres de diamètre muni d'un trop plein dont la tranche se trouvait à une distance verticale du distributeur égale à environ 17 mètres. De façon précise, cette distance verticale a varié de 16,80 m. à 17,30 m. suivant les expériences.

b) *Poche d'air*. — La poche d'air était constituée par un bout de tube de 80-90 fileté à une de ses extrémités. L'autre extrémité fermée par une calotte sphérique portait un robinet à pointeau dont une voie était en relation avec l'intérieur de la poche, et dont l'autre voie communiquait avec l'extérieur par l'intermédiaire d'une valve de bicyclette, faisant obturation automatique pour les pressions venant de l'intérieur.

c) *Indicateurs*. — J'ai utilisé pour l'enregistrement des pressions des indicateurs Crosby; ces appareils sont essentiellement constitués par un cylindre de 2 centimètres de diamètre où glisse un piston, qui se déplace sous l'action de la pression à mesurer et est maintenu par un ressort à boudin antagoniste. Le piston entraîne un système articulé qui amplifie ses mouvements et les inscrit sur un cylindre enregistreur portant un papier enfumé.

On choisit les ressorts antagonistes et la vitesse de rotation du cylindre enregistreur suivant le phénomène à étudier. Les ressorts que j'ai employés donnaient, suivant le cas, de 4 à 15 millimètres de déplacement du style pour une augmentation de pression de 1 k. par cm^2 . Les cylindres du type Richard faisaient un tour en 13 et en 52 secondes.

d) *Mesure du temps*. — Le temps était mesuré au moyen d'une horloge électrique actionnant un signal de Deprez qui produisait sur les graphiques le trait en crémaillère que l'on aperçoit à la partie supérieure de certains. Chaque trait horizontal de cette crémaillère correspond à $1/4$ de seconde.

[23] B) MARCHE D'UNE EXPÉRIENCE. — a) *Remplissage de la conduite*. — La conduite étant mise en charge, le distributeur était ouvert en plein à plusieurs reprises de façon à entraîner la majeure partie de l'air contenu dans la conduite. Après cette opération, il restait un peu d'air logé dans la partie supérieure des manchons de raccord : il suffisait pour l'expulser de dévisser de quelques filets les vis d'obturation. Après cela, il ne restait plus que quelques bulles d'air adhérentes à un pas de vis, à une tache de rouille de la conduite, etc.; bulles absolument rebelles en tout cas aux procédés d'expulsion précédents. On ouvrait alors à nouveau le distributeur pendant un certain temps de façon à remplir la conduite d'eau fraîche em-

pruntée à la chambre de mise en charge. Cette eau, saturée en air sous la pression atmosphérique, était capable de dissoudre les bulles quand elle se trouvait à une pression supérieure. La dernière opération étant généralement effectuée le soir, la dissolution avait toute la nuit pour s'effectuer. Il a été exceptionnel que la conduite ne fût pas en état le lendemain matin.

La marche du remplissage étant contrôlée au moyen du procédé indiqué par Camichel⁽¹⁾ en enregistrant les coups de bélier produits par une fermeture brusque et complète du distributeur; l'examen des figures 5 à 10 montre l'aspect des courbes d'enregistrement quand la conduite n'est pas parfaitement purgée. Au contraire, la figure 2 donne une courbe caractéristique d'une conduite entièrement purgée.

b) La conduite une fois en état, on injectait dans la poche d'air la quantité d'air voulue. Cette opération se faisait au moyen d'une pompe à bicyclette : avec un peu d'habitude, on arrive à savoir le nombre de coups à donner pour obtenir le résultat cherché.

Tout étant ainsi disposé pour l'expérience, on ouvrait le distributeur plus ou moins, suivant le débit désiré; une fois établi dans la conduite un régime permanent de vitesse, on dirigeait dans un réservoir, préalablement taré, l'eau qui jaillissait à l'aval; et au bout d'un temps variant, suivant le débit, de quelques secondes à plusieurs minutes, on déterminait l'augmentation de poids du réservoir. Après cette mesure, on mettait en marche le cylindre enregistreur sur lequel avaient été préalablement tracées la ligne de pression atmosphérique et la ligne de pression statique; le distributeur était alors brusquement fermé et le coup de bélier s'inscrivait sur le cylindre. Une fois les oscillations arrêtées, le volume d'air contenu dans la poche était déterminé sur une cuve à eau.

[24] C) RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX. — 1) *Forme des courbes*. — Je reproduis dans les figures 2 à 10 des courbes des coups de bélier dans des conduites entièrement purgées (*fig. 2*) ou contenant à l'extrémité aval des poches de 100 cm³ (*fig. 5* et 6), de 220 cm³ (*fig. 7* à 9), de 2730 cm³ (*fig. 10*)⁽²⁾.

Pour chacun des volumes, il est donné plusieurs courbes obtenues avec des valeurs différentes de la vitesse initiale.

La forme des courbes appelle les observations suivantes :

a) La variation du débit augmente les ordonnées des courbes, mais ne change pas la forme générale de celles-ci. Ce n'est d'ailleurs qu'une première approximation. Si on étudie de près les courbes 29 C et 29 D par exemple, on voit qu'au début

⁽¹⁾ Voir Camichel, Eydoux et Gariel, *loc. cit.*, p. 13.

⁽²⁾ Les volumes sont donnés, sauf indications contraires, en cm³ sous la pression atmosphérique. Il faut donc les multiplier par $\frac{10}{27}$ pour obtenir le volume dans les conduites de l'expérience.

de la cinquième période, la courbe 29 C présente une inflexion dans la partie positive des surpressions, alors que cette même inflexion était déjà apparue à la fin de la quatrième période dans la courbe 29 D.

b) Sauf pour les courbes de surpressions dans les conduites entièrement purgées, la partie positive des surpressions est, compte tenu de l'amortissement, plus grande

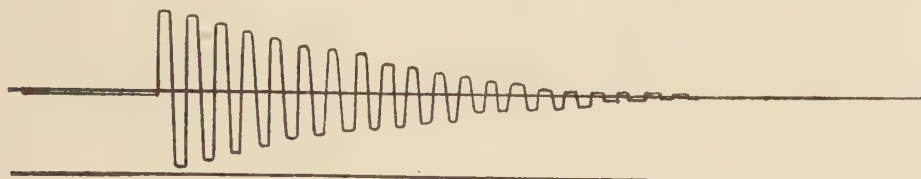


FIG. 2. — Exp. 27. On remarquera la forme carrée caractéristique d'une conduite entièrement purgée.

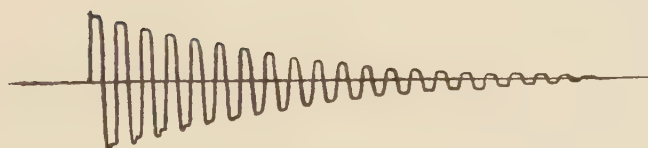


FIG. 3. — Exp. 26 A — $v_0 = 3$ cm./sec. Conduite presque parfaitement purgée.

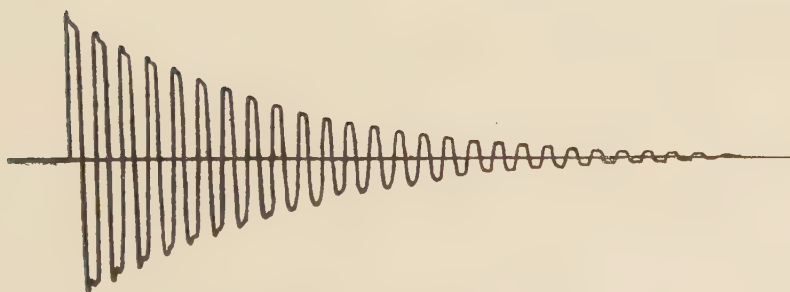


FIG. 4. — Exp. 26 B. Conduite presque parfaitement purgée; $v_0 = 8$ cm./sec.

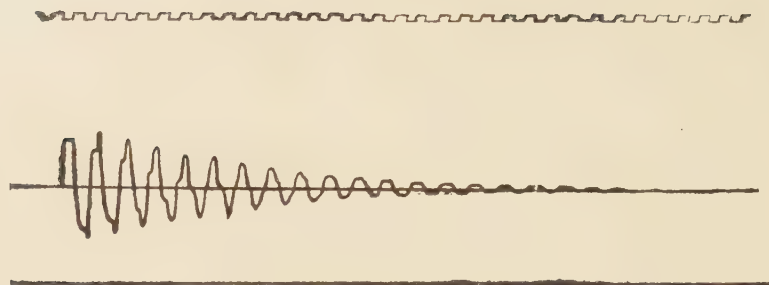


FIG. 5. — Exp. 29 C. Poche de 100 cm³ à l'aval de la conduite.

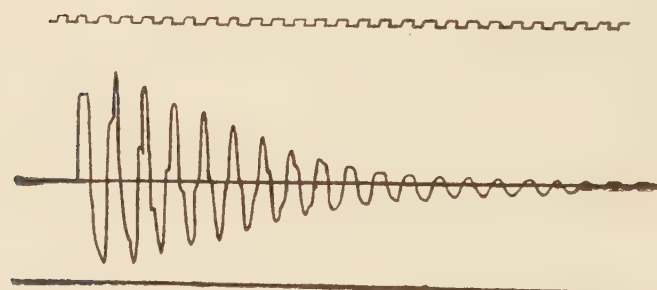


FIG. 6. — Exp. 29 D. Poche de 100 cm³ à l'aval de la conduite.

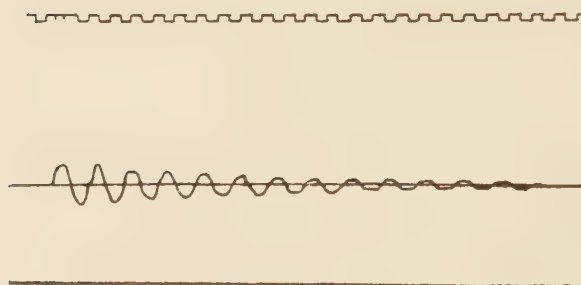


FIG. 7. — Exp. 32 I. Poche de 220 cm³ à l'aval; $v_0 = 3,1$ cm./sec.

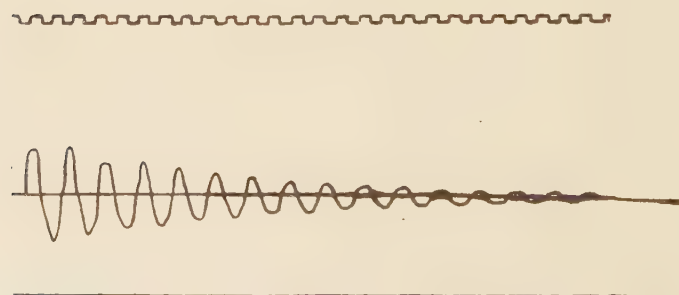


FIG. 8. — Exp. 32 J. Poche de 220 cm³ à l'aval; $v = 6,54$ cm./sec.

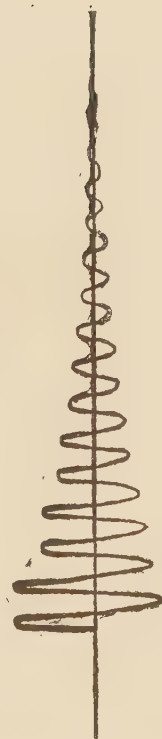


FIG. 9. — Exp. 33 K. Poche de 220^3 à l'aval; $v_0 = 10,95$ cm./sec.



FIG. 10. — Exp. 99. Poche de 2730 m³ à l'aval.

que la partie négative. Un fait analogue avait été indiqué par Camichel ⁽¹⁾ pour les mouvements d'ensemble. Cela tient d'ailleurs tout simplement à ce que, pour les oscillations de grande amplitude, l'élasticité de la poche d'air n'est pas proportionnelle aux variations de volume.

[25] c) Les courbes reproduites plus haut indiquent une certaine périodicité dans les coups de bélier. En fait, on n'a pas le droit strict de parler de période pour des courbes analogues à celles reproduites plus haut; cependant, si l'on mesure l'intervalle de temps compris entre deux zéros de la surpression correspondant tous deux à deux portions croissantes ou deux portions décroissantes de la courbe, l'expérience montre que le rapport entre cet intervalle et le nombre de maximums de la surpression compris entre ces zéros est constant et indépendant :

- 1° du nombre des maximums intermédiaires;
- 2° du numéro de ces maximums.

Voici par exemple une expérience (23 P) donnant l'intervalle de temps écoulé entre deux zéros de la surpression, correspondant à deux portions montantes consécutives de la courbe :

N° DE L'OSCILLATION	PSEUDO-PÉRIODE
1	1,50
2	1,50
3	1,52
4	1,52
5	1,52
6	1,54

C'est cet intervalle de temps que j'appellerai pour abrégé pseudo-période.

Or cette pseudo-période est indépendante de la vitesse initiale, ainsi qu'il résulte du tableau ci-dessous relatif à une série d'expériences :

(1) Camichel, C. R. (1917), t. 164, p. 331.

Expériences.	Volume de la poche d'air ramené à la p. atmosphérique (en cm ³).	Vitesse initiale (en cm./sec.).	Pseudo-périodes (en sec.).
8 A	0	1,38	0,571
8 B		2,77	0,569
9 C		4,27	0,565
9 D		9,06	0,585
10 E	49	0,81	0,615
10 F		1,91	0,605
10 G		6,71	0,625
13 L	195	1,87	0,805
13 M		3,35	0,80
11 I		4,32	0,80
12 J		5,85	0,81
12 K		12,32	0,815
17 I'	470	1,28	0,993
17 J'		4,47	1,015
18 K		8,20	1,035
18 L	730	1,755	1,132
20 M		3,6	1,25
21 N		7,8	1,24
22 O	1170	1,815	1,54
23 P		5,75	1,52
24 Q		9,32	1,47
25 R		14,55	1,47

La vérification annoncée se fait au $\frac{1}{30}$.

Les relations entre la pseudo-période et les caractéristiques de la conduite (diamètre, longueur, volume de poche d'air, etc.), seront étudiées au chapitre suivant.

[26] d) *Influence de la vitesse initiale sur la valeur du premier maximum de surpression.* — Si on a affaire à une conduite entièrement purgée, nous avons vu que le coup de bélier croissait proportionnellement à la vitesse, la valeur du rapport de proportionnalité étant égale approximativement à 100 pour les con-

duites industrielles, dans lesquelles la valeur de a est généralement comprise entre 800 et 1200 mètres.

Si l'on a affaire à une conduite de faible longueur, munie d'une poche d'air de volume notable, la méthode que j'ai donnée dans le premier chapitre permet de voir que le rapport du coup de bélier à la vitesse initiale croît avec cette dernière : dans une expérience où v_0 passait de 6,2 à 13 cm./sec., la surpression est passée de 11,7 à 27 m., alors que la loi de proportionnalité aurait exigé pour cette dernière surpression une valeur de 24,5 m.

Voici d'ailleurs un tableau relatif à la série d'expériences précédentes :

N° de l'expérience.	Volume de la poche d'air ramené à la p. atmosphérique (en cm ³).	Vitesse initiale.	Surpression initiale (en kgr.).	Rapport.
8 A	0	1,38	1,7	1,31
8 B		2,77	3,8	1,37
9 C		4,27	6,0	1,40
9 D		9,06	11,8	1,30
10 F	49	1,91	2,3	1,20
10 G		6,71	8,5	1,26
11 I	195	4,3	5	1,15
12 J		5,85	7,1	1,20
12 K		12,32	14,95	1,21
13 L		1,87	2,3	1,22
13 M		3,35	4	1,21
17 I'	470	1,28	1,29	1,05
17 J'		4,47	5	1,14
18 K		8,20	9,16	1,58
18 L	730	1,755	1,1	0,63
20 M		3,6	3,1	0,89
21 N	.	7,8	8	1,025
22 O	1170	1,815	0,7	0,39
23 P		5,75	4,5	0,77
24 Q		9,32	8,1	0,87
25 R		14,65	13,5	0,925
40 C	1700	9,2	6	0,653
43 D		14,3	10,5	0,735

On voit que si le rapport de la surpression à la vitesse initiale peut être considéré comme constant pour de faibles poches, il n'en est plus de même dès que la poche commence à avoir un certain volume.

Dans quelle mesure peut-on alors se servir pour calculer les surpressions de la théorie du mouvement en masse, basé sur la possibilité de négliger la compressibilité de l'eau et la variation de volume de la conduite? Dans l'expérience 25 R on trouve 1,49 pour valeur du maximum de $\frac{z_m}{z_0}$, alors que d'après la théorie du mouvement en masse ce maximum devrait être compris entre 1,56 et 1,66; dans l'expérience 43 R, pour une vitesse initiale presque égale on trouve comme valeur expérimentale 1,4, les valeurs calculées étant 1,42 et 1,48. Mais il intervient ici un nouvel élément, savoir la dissolution de l'air. Cette dernière était négligeable dans les expériences de Camichel, où la période était de l'ordre de 1/3 de seconde. On peut donc considérer que l'abaque de la figure 1 donnera pour les surpressions des valeurs relativement approchées par *excès* dès que le volume sera assez grand. Nous verrons un phénomène analogue au chapitre III, dans l'étude des surpressions de résonance.

Emploi de grands réservoirs d'air.

Puisque à partir d'un certain volume la formule 13 du chapitre I donne une valeur par excès du coup de bélier initial, on peut penser qu'il sera possible d'atténuer ce coup de bélier par un dimensionnement convenable de l'appareil. Je me bornerai à de brèves indications d'ordre pratique, le sujet ayant été traité à fond par M. de Sparre ⁽¹⁾, dont les travaux ont amené M. Ducrest à installer de tels réservoirs dans les usines ⁽²⁾ utilisant la force vive des chutes pour actionner directement des presses à étirer ou à emboutir. Le fonctionnement de telles presses provoque dans les canalisations des coups de bélier considérables, soit que la presse s'arrête directement sur l'objet à façonner (arrêt en trois ou quatre secondes, alors que $\frac{2L}{a}$ est souvent le double), soit qu'elle soit brutalement arrêtée par la manœuvre du distributeur ou le choc contre la butée, ce coup de bélier atteignant dans les presses des valeurs de 50 à 100 kg.

Supposons qu'une conduite alimentant les presses soit le siège d'un coup d'onde remontant vers l'amont. A chaque bifurcation de conduite ⁽³⁾ le coup se partagera

⁽¹⁾ Houille blanche (1902), pp. 257 et 293.

⁽²⁾ Par exemple, à Lancey, Servette (Usine d'État construite et exploitée par MM. Bouchayer).

⁽³⁾ Voir Eydoux, C. R. (1916), t. 163, p. 346, et Poisson, Mémoires de l'Institut (1811), t. 11, p. 305.

entre les diverses conduites débouchant en ce point. Au collecteur en particulier, il se partage entre les conduites secondaires d'alimentation et la conduite forcée; dans cette dernière par suite remonte un coup d'onde, assez atténué par rapport au coup initial, mais suffisant néanmoins pour ébranler gravement les parties supérieures dont les rivures finissent à la longue par céder. L'interposition d'un réservoir d'air assez grand à l'aval du collecteur permet de réduire le coup d'onde dans la conduite forcée à une fraction cessant d'être dangereuse pour les parties hautes de cette dernière.

Les diverses dimensions seront calculées de façon que :

1) Le réservoir contienne un volume d'eau nettement supérieur à celui nécessité par une opération de la presse, pouvant ainsi fournir à lui seul le débit nécessaire.

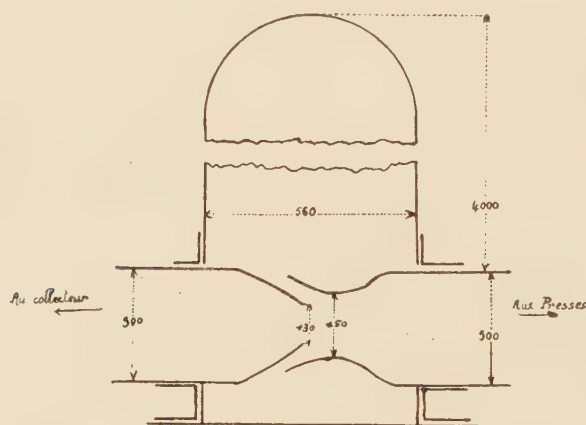


FIG. 11.

2) Le réservoir contienne un volume d'air suffisant pour qu'en fin d'opération la pression soit au moins égale à celle nécessitée par le fonctionnement de la presse.

3) Les dimensions de la conduite d'alimentation permettent, pendant les périodes d'arrêt, le remplacement de l'eau écoulée, de façon à ramener l'air à son état initial.

Cette dernière condition fixe le minimum d'orifice à donner au débouché de la conduite dans le réservoir d'air; il n'y a d'ailleurs aucun avantage à dépasser ce minimum, car cela augmente le coup d'onde qui passe dans la conduite. Comme les dimensions de cette dernière sont généralement supérieures à ce minimum, on est amené à le faire déboucher dans le réservoir par un ajutage convergent placé en face d'un divergent aboutissant aux presses. Je donne ci-dessous (d'après une note communiquée obligeamment par M. Ducrest) le schéma de la première installation réalisée à Lancey (fig. 11).

Le rôle des ajutages est multiple. — 1) Ils diminuent le coup d'onde dans la

partie amont, puisqu'une partie de ce coup part dans la poche d'air et que la surpression entrant par le convergent diminue dès qu'elle arrive au diamètre normal.

2) Lors des contre-coups de bélier, la force vive perdue dans les ajutages est souvent plus grande que la moitié de la force vive totale, d'où rapide amortissement.

Le fonctionnement de ces réservoirs a répondu pleinement aux espérances fondées sur eux : les surpressions près des presses atteignant toujours des centaines de mètres d'eau, on n'avait plus dans la partie amont des conduites que des surpressions de quelques kilogrammes.

[27] e) J'ai annoncé au paragraphe 19 que l'on pouvait obtenir au bout de quelques intervalles des surpressions supérieures au coup de bélier initial, pourvu que la conduite fût munie d'une poche d'air de volume assez faible. L'examen de la figure 6 donne de cela un exemple où nous sommes sensiblement dans les conditions du paragraphe 19 : la poche a en effet, sous une charge de 17 mètres d'eau, un volume de 30 cm³. Alors que le coup initial n'avait pas atteint 16 kilogrammes, on dépasse 18 kilogrammes lors du second maximum, et lors du deuxième on est encore au-dessus de 16, malgré un amortissement assez grand, puisqu'en quinze oscillations le coup est devenu inférieur à 1/10 de sa valeur initiale.

Cela confirme :

- 1) la nécessité d'éviter toute accumulation d'air;
- 2) l'avantage de dispositifs détruisant le plus rapidement possible la force vive de coup de bélier; sous réserve naturellement qu'il n'en résultera pas une perte de charge appréciable.

Les figures 5 à 9 montrent la transition du coup de bélier dans la conduite purgée à l'oscillation en masse.

[28] RÉSUMÉ DU CHAPITRE I. — On peut, il me semble, résumer ainsi les principaux résultats acquis :

1) Le réservoir d'air à l'aval atténue toujours le coup de bélier *initial*, mais peut, s'il n'est pas convenablement calculé, entraîner de dangereuses surpressions lors les oscillations ultérieures.

2) Si le volume du réservoir est assez grand, on peut appliquer les formules de l'oscillation en masse, ainsi que l'avait prévu Rateau et que le montre le fonctionnement ininterrompu de centaines de presses depuis plus de quatre ans.

CHAPITRE III

[29] Dans la préface qu'il écrivit pour la traduction française du mémoire d'Allievi, M. Rateau ⁽¹⁾ disait : « La théorie des coups de béliers est maintenant assez bien établie dans ses grandes lignes pour qu'elle puisse rendre des services aux ingénieurs qui ont à compter avec ces phénomènes si gênants. Il est à souhaiter que cette théorie soit au plus tôt soumise au contrôle de l'expérience. »

En fait, il y avait en ce moment deux théories en présence : mouvement par ondes et oscillations en masse. Elles différaient notablement sur un point où la vérification expérimentale était facile, savoir la période des oscillations : « D'après M. Allievi, pour un tuyau à réservoir d'air, la période est égale au temps $\frac{4L}{a}$ que met l'onde à parcourir la conduite aller et retour... La période à laquelle conduit mon mode de calcul est notablement différente; elle est égale à $2\pi\frac{L}{a}$... Le rapport entre la période telle que je la trouve et celle de M. Allievi est donc égal à $\frac{\pi}{2}$... »

Si aisées que soient des expériences qui consistent à enregistrer sur un même cylindre la pression et le temps, c'est en 1915 seulement que Camichel ⁽²⁾ montra que dans les conduites à caractéristique unique, entièrement purgées, la période était celle d'Allievi, résultat qui avait d'ailleurs été prévu par Rateau. Mais dans les cas de conduites munies de réservoirs d'air de certaine importance l'expérience montrait que la période était donnée par la théorie des oscillations en masse; il m'a donc paru intéressant de rechercher comment s'effectue le passage d'une formule à l'autre.

C'est le résultat de cette recherche — faite théoriquement du point de vue d'Allievi — que j'exposerai dans la première partie de ce chapitre, avec la vérification des formules trouvées.

Le dispositif expérimental utilisé m'a conduit à examiner quelques points relatifs à la question des résonances, points qui feront l'objet d'une deuxième partie.

Enfin j'étudierai dans une troisième partie les régimes permanents présentés par une conduite possédant une poche d'air sur son trajet.

⁽¹⁾ Rateau, *Revue de Mécanique* (1904), t. 50, pp. 8-9.

⁽²⁾ Camichel, *C. R.* (1915), t. 161, p. 412.

I

CALCUL DE LA PÉRIODE PROPRE DES CONDUITES DANS LE CAS DE PETITES OSCILLATIONS

[30] Soit une conduite horizontale munie à son extrémité aval d'une poche d'air de volume u_0 sous la pression $z_0 = \gamma_0 + h$ et siège d'un courant d'eau de vitesse uniforme v_0 . Fermons le distributeur complètement et admettons qu'un régime permanent s'établisse. A ce moment la fonction F pourra être mise sous la forme d'une série de Fourier :

$$F(t) = A_0 + \sum A_p \sin (pmt + \varphi_p),$$

m étant la pulsation $\frac{2\pi}{\Theta}$ du régime périodique.

Par suite, on a pour valeurs de v et z à l'extrémité aval de la conduite :

$$\begin{aligned} z &= z_0 + 2 \sum A_p \sin \frac{pmL}{a} \cos \left\{ pm \left(t - \frac{L}{a} \right) + \varphi_p \right\}, \\ v &= v_0 - \frac{2g}{a} \left[A_0 + \sum A_p \cos \frac{pmL}{a} \sin \left\{ pm \left(t - \frac{L}{a} \right) + \varphi_p \right\} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Or, dans le cas d'une fermeture complète, on a, en appelant S la section de l'ajutage reliant la poche à la conduite,

$$v = -\frac{\alpha}{S} \frac{d}{dt} z^{\left(-\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Remplaçons dans cette opération v par sa valeur tirée de (1), multiplions les deux membres de cette équation par dt et intégrons par rapport à t ; il vient, sous la seule réserve que la série du second membre est convergente :

$$-\frac{\alpha}{S} z^{-\frac{1}{\gamma}} = \left(v_0 - \frac{2g}{a} A_0 \right) t + \frac{2g}{a} \sum \frac{A_p \cos \frac{pmL}{a}}{p^m} \cos \left\{ pm \left(t - \frac{L}{a} \right) + \varphi_p \right\}.$$

Or γ étant périodique, $z^{\frac{1}{\gamma}}$ l'est aussi; il en est de même de la fonction représentée par la série sous le signe $\sum$. Par suite, on doit avoir :

$$v_0 - \frac{2g}{a} A_0 = 0,$$

$$A_0 = \frac{av_0}{2g}.$$

Le résultat précédent suppose simplement que l'on est arrivé au régime périodique.

Introduisons maintenant l'hypothèse que nous n'avons affaire qu'à des oscillations de faible amplitude.

Cette hypothèse se traduit par :

$$v = \frac{u_0}{2S\gamma z_0} \frac{dz}{dt}. \quad (2)$$

Portons dans (2) les valeurs de v et de z données par (1), il vient :

$$-\frac{2g}{a} \sum A_p \cos pm \frac{L}{a} \sin \left\{ pm \left(t - \frac{L}{a} \right) + \varphi_p \right\} = -\frac{2u_0}{S\gamma z_0} \sum pm A_p \sin \frac{pmL}{a} \cos \left\{ pm \left(t - \frac{L}{a} \right) + \varphi_p \right\}, \quad (3)$$

sous la réserve, analogue à celle déjà faite, que la série du second membre représente bien la dérivée $\frac{dz}{dt}$.

Posons

$$\frac{a}{Sgz_0L} = k\gamma;$$

la relation entraîne la série d'égalités *simultanées*

$$A_p \cos pm \frac{L}{a} = ku_0 A_p \frac{pmL}{a} \sin \frac{pmL}{a} \quad p = (1, 2, \dots) \quad (4)$$

qui se réduisent à

$$\cos \frac{pmL}{a} = ku_0 \frac{pmL}{a} \sin \frac{pmL}{a} \quad (5)$$

pour toutes les valeurs de p pour lesquelles A_p est différent de zéro.

Or si une des relations (4) est satisfaite, les autres ne le seront généralement pas, ainsi qu'il est aisé de le vérifier. Par suite, dans la grande majorité des cas, un seul des coefficients A_p sera différent de zéro. En d'autres termes, *quand le régime permanent est établi, les petites oscillations sont sinusoïdales.*

[31] La période de la vibration de plus basse fréquence est définie par la relation

$$\frac{mL}{a} \operatorname{tg} \frac{mL}{a} = \frac{\pi}{2} \frac{\frac{4L}{a}}{\Theta} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\frac{4L}{a}}{\Theta} = \frac{Sg\gamma z_0 L}{a^2 u_0}, \quad (6)$$

qui appelle les observations suivantes :

1) Supposons $u_0 = 0$. On a :

$$\lg \frac{mL}{a} = \infty,$$

$$\Theta = \frac{4L}{a}.$$

On retrouve la période d'Allievi. Nous verrons ultérieurement que la quantité $\frac{4L}{a}$ intervient dans tous les calculs relatifs à la période d'un tronçon cylindrique de conduite dont la longueur est L et où la vitesse de propagation des ondes est a . En raison de la circonstance précédente, j'appellerai cette quantité *période sans poche d'air*.

2) Supposons que nous puissions considérer $\frac{mL}{a}$ comme petit; en d'autres termes, supposons que la période Θ du mouvement d'ensemble soit grande par rapport au temps $\frac{L}{a}$ nécessaire à un ébranlement pour parcourir la conduite. On peut écrire en confondant l'arc avec la tangente :

$$\frac{m^2 L^2}{a^2} = \frac{S z_0 g \gamma L}{a^2 u_0},$$

$$\Theta = 2\pi \sqrt{\frac{u_0 L}{S g \gamma z_0}}.$$

C'est la formule donnée par Rateau, pour la période de l'oscillation en masse. La raison de la différence signalée par cet auteur entre sa formule et celle d'Allievi apparaît maintenant comme étant due à ce que le premier suppose l'élasticité de la conduite concentrée dans la région de la poche d'air, alors que l'ingénieur italien admet que cette élasticité est répartie sur toute la longueur de la conduite.

Nous retrouvons le théorème classique sur le rapport égal à $\frac{\pi}{2}$ entre la période d'un circuit oscillant à self et capacité concentrées et celle d'une antenne de même self et de même capacité totales, mais uniformément réparties.

3) Prenons enfin le cas général, où la poche d'air à un volume notable, mais pas assez grand cependant pour qu'on puisse confondre l'arc et la tangente. La formule (5) — qui n'est d'ailleurs autre que l'équation donnant la période d'une antenne dont une extrémité est au sol et dont l'autre extrémité est reliée à un condensateur — est susceptible d'une solution graphique très simple.

Posons en effet

$$\frac{4L}{a\Theta} = n,$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} n,$$

n est le rapport de la période sans poche d'air à la période de la conduite; il variera de zéro à 1 quand le volume de la poche partant d'une valeur importante tendra vers zéro.

Traçons la courbe ⁽¹⁾ d'abscisses n et d'ordonnées $\xi \operatorname{tg} \xi$, courbe qui peut servir pour toutes les conduites à caractéristique unique. L'abscisse de l'intersection de cette courbe avec la droite d'ordonnée

$$\frac{1}{ku_0} = \frac{Sz_0 g \gamma L}{a^3 u_0}$$

donne le rapport de la période sans poche d'air de la conduite — période aisément calculable et d'ailleurs facile à déterminer expérimentalement ⁽²⁾ — à la période propre de cette conduite.

Revenons à la relation

$$\cos \frac{pmL}{a} = ku_0 \frac{pmL}{a} \sin \frac{pmL}{a} \quad (5)$$

que nous écrirons :

$$\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{1}{ku_0} \times \frac{1}{\xi}.$$

Toutes les racines de cette équation sont les abscisses de l'intersection de la tangentoïde $Z_1 = \operatorname{tg} \xi$ avec l'hyperbole $Z_2 = \frac{1}{ku_0} \times \frac{1}{\xi}$. A chacune des racines de cette équation correspond, d'autre part, une série d'harmoniques. L'expérience nous apprendra ceux qui sont susceptibles de se produire dans la réalité.

Détermination expérimentale de la période.

[32] Pour établir l'équation (5) nous avons supposé l'établissement d'un régime permanent d'oscillations de faible amplitude. L'expérience nous a d'autre part montré l'existence d'une pseudo-période dans les oscillations amorties produites par une fermeture brusque et complète. Il est naturel de rechercher si cette pseudo-

⁽¹⁾ J'attire en cette circonstance l'attention sur l'intérêt offert dans beaucoup de calculs numériques par la division centésimale du cercle : 100 n représente en effet la mesure en grades de l'angle dont la mesure en radians est $\frac{\pi n}{2}$.

Dans l'espèce, les tables centésimales donnant immédiatement $\log \operatorname{tg} \xi = \log \operatorname{tg} 100 n$, le calcul du produit $\xi \operatorname{tg} \xi$ est très rapide.

⁽²⁾ Par exemple par la méthode de la dépression brusque (Camichel, *C. R.*, t. 161, p. 412; t. 163, p. 150).

période ne se rapprocherait pas beaucoup de la période définie pour le régime permanent. J'ai en conséquence dressé le tableau ci-dessous relatif à la série d'expériences utilisée au chapitre II et complétée par d'autres mesures. Ce tableau est destiné :

- 1) à rechercher si le produit $u_0 \xi \operatorname{tg} \xi$ est constant;
- 2) au cas où ce produit aurait été constant, à voir s'il en résultait pour γ une valeur comprise entre 1 et 1,41.

U_0 en cm^3 .	Pseudo-période en secondes.	$\frac{T}{\Theta}$	$\xi \operatorname{tg} \xi$	$u_0 \xi \operatorname{tg} \xi \times 10^{-5} \text{ m}^3$.
3,030	2,435	0,284	0,142	16,3
1,700	1,80	0,316	0,265	17,1
1,570	1,77	0,32	0,275	16,8
1,200	1,54	0,37	0,38	17,15
700	1,24	0,46	0,64	17,0
470	1,04	0,546	0,97	17,3
340	0,945	0,605	1,325	17,15
290	0,867	0,657	1,565	17,25
240	0,85	0,67	1,25	16,85
				Moyenne : 16,99

Pour cette série d'expériences, on avait :

$$T = \frac{4L}{a} = 0'',57,$$

$$k = 14,8 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

La constance du produit $\xi \operatorname{tg} \xi$ est remarquable : il semble bien qu'on observe une tendance à l'augmentation, du début à la fin, mais cela s'explique aisément en observant que les compressions lentes se rapprochent davantage de la compression isotherme, alors que les oscillations rapides auraient tendance à se faire adiabatiquement. La valeur moyenne conduit à la valeur 1,13 pour γ dans la poche en expérience.

Pour si satisfaisante que soit la concordance, il convient de ne pas oublier les diverses hypothèses mises d'une part à la base du calcul et utilisées d'autre part dans la vérification expérimentale.

On peut résumer les premières en supposant que les compressions et les dilations se font suivant la loi

$$u = u_0 \left(1 - \frac{z}{z_0 \gamma} \right),$$

γ étant une constante indépendante du volume z_0 ; or, quelle que soit la loi de compressibilité admise pour l'air, elle conduit à des surpressions supérieures aux dépressions; la présence d'air se dissolvant dans l'eau a d'autre part pour effet de diminuer les maximums et d'augmenter les minimums de pression. Il n'est nullement évident que la juxtaposition de ces divers phénomènes conduise à la loi de compressibilité précédente, puisque la pseudo-période du chapitre II peut n'avoir aucun rapport avec la période du mouvement permanent défini dans le présent chapitre.

Il se pourrait par conséquent que la constance du produit $u_0 \xi \operatorname{tg} \xi$ ne soit due qu'à la compensation de plusieurs causes d'erreur. Il était donc intéressant de chercher à éliminer certaines d'entre elles, et en particulier d'avoir effectivement un mouvement permanent se rapprochant, autant que possible, du mouvement sinusoïdal plus haut défini.

II

[33] J'ai été ainsi amené à faire appel aux phénomènes de résonance. Camichel avait déjà étudié ces derniers pour les conduites entièrement purgées ⁽¹⁾ et pour les conduites assez courtes pour pouvoir être le siège d'un mouvement d'oscillation en masse ⁽²⁾. Il avait montré que lorsqu'on produit des oscillations entretenues dans des conduites entièrement purgées :

1) la pression varie de façon périodique, la période étant celle déduite de la théorie d'Allievi;

2) les maximums de charge sont égaux au double de la charge statique, et les minimums de pression sont égaux à la pression atmosphérique.

Dans le cas d'oscillations en masse avec poche d'air à l'aval, cet auteur avait trouvé que les minimums de pression étaient supérieurs à la pression atmosphérique et que les parties positives des surpressions étaient plus grandes et plus aiguës que les parties négatives.

[34] D'autre part, en dehors de son application à la vérification de la théorie exposée dans la première partie de ce chapitre, l'étude des phénomènes de résonance présente un gros intérêt pratique, en raison des surpressions qui, de leur fait, peuvent prendre naissance. Or les causes qui peuvent faire résoner les conduites sont multiples.

a) Prenons d'abord les conduites forcées alimentant des turbines : Si le régula-

⁽¹⁾ Camichel, *C. R.* (1916), t. 163, p. 224.

⁽²⁾ Camichel, *C. R.* (1915), t. 161, p. 343, et (1917), t. 164, p. 331.

teur se met à « pomper » et si la période de ce pompage est voisine de celle de la conduite, ou de celle d'un des harmoniques, la pression peut croître d'une façon dangereuse, avec des débits relativement très faibles. C'est ainsi qu'en mettant à la base d'une conduite de 1,20 m. de diamètre un robinet dont l'ouverture avait 10 cm² (moins d'un millième de l'aire de la conduite), et en ouvrant et fermant ce robinet à des intervalles de temps convenables, Camichel et Eydoux⁽¹⁾ sont arrivés en 30 secondes à provoquer une surpression atteignant les 2/5 de la charge statique : il est aisé de voir qu'une fraction de m³ d'eau a suffi pour atteindre ce résultat.

b) Supposons maintenant une conduite alimentant directement et simultanément plusieurs presses à emboutir. Nous avons dit que la manœuvre rapide du distributeur ou l'arrêt brusque en fin de course produisait des variations de pressions relativement importantes. Or des phénomènes de résonance peuvent se produire *par suite d'une cadence fortuite dans la fabrication*. Ce cas sera évidemment extrêmement rare, mais peut à la longue se rencontrer dans une installation effectuant dans la journée des centaines d'opérations.

c) J'indiquerai pour terminer un cas de résonance qui se rencontre très souvent dans la pratique, celui des conduites d'eau des installations intérieures. Tout le monde a entendu ce grondement si désagréable par lui-même, indice de violents ébranlements, faciles à constater en touchant les conduites, et source de nombreux procès entre propriétaires et entrepreneurs de plomberie. Or *une* des causes doit être recherchée dans le jeu des robinets. Supposons en effet que ceux-ci sont construits de façon telle qu'ils tendent à s'ouvrir lors d'une onde de dépression et à se fermer lors d'une onde de compression. Si le jeu rend ces mouvements possibles, il y a résonance. Or dans trois installations qui présentaient ce phénomène, j'ai effectivement trouvé du jeu dans les robinets.

Ce n'est toutefois pas la seule cause possible : M. Camichel m'a signalé une installation où la résonance avait lieu sous l'influence du clapet commandant l'admission du gaz dans un chauffe-bains.

J'ai donc été amené à installer les expériences dont je vais rendre compte.

Étude expérimentale de la résonance.

[35] a) DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL. — Pour étudier expérimentalement les phénomènes de résonance, il suffisait de remplacer l'un des robinets du tronçon aval de la conduite par un des dispositifs indiqués par Camichel à cet effet : robinet ouvert

(1) Camichel, Eydoux et Gariel, *Étude théorique et expérimentale des coups de bélier*, p. 384. L'expérience a été arrêtée pour ne pas risquer d'endommager les conduites.

et fermé périodiquement ⁽¹⁾ ou clapet automatique ⁽²⁾. Le premier appareil avait l'avantage de laisser l'opérateur entièrement maître de la période à essayer; mais le clapet automatique, qui prend la période que lui impose la conduite, était évidemment plus propre à étudier cette période. D'autre part il permet de régler aisément le débit; enfin, en raison du fait que le pompage des régulateurs et la résonance des installations intérieures sont dus à des organes sans période bien définie,

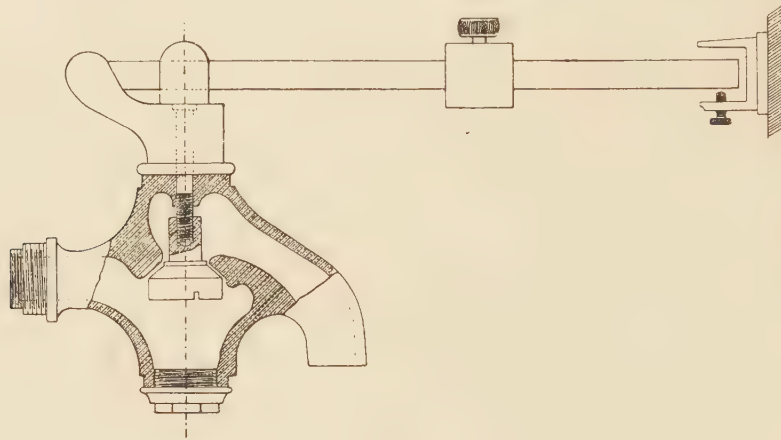


FIG. 12.

le clapet automatique était plus apte à schématiser ces phénomènes. Aussi est-ce lui que j'ai exclusivement employé.

On sait que cet appareil (*fig. 12*) se compose d'une soupape entièrement métallique ⁽³⁾ fixée à un levier à axe horizontal qu'on peut charger plus ou moins (de façon que la soupape s'ouvre sous une pression déterminée) et dont on peut régler la course (de façon à régler le débit du clapet).

La marche d'une expérience était la suivante : la poche d'air était remplie du volume d'air convenable, on réglait l'emplacement de la surcharge du levier, de façon que la soupape s'abaissât pour une pression très légèrement inférieure à la pression statique, et qu'on obtenait en ouvrant un robinet auxiliaire placé sur le tronçon aval : la dépression ainsi obtenue suffisait à maintenir abaissée la soupape et cependant ne provoquait aucun changement appréciable dans la pression statique enregistrée par un indicateur. Le robinet auxiliaire étant refermé, on réglait suivant le débit voulu la course du levier, on abaissait à la main ce dernier, puis on l'abandonnait à lui-même : le clapet se fermait, s'ouvrait à nouveau, et ainsi de suite.

⁽¹⁾ Camichel, Eydoux et Gariel, *loc. cit.*, p. 384.

⁽²⁾ Camichel, *Revue électrique* (1916), t. 26, p. 291.

⁽³⁾ Un cuir ou un caoutchouc jouerait le même rôle qu'une petite poche d'air.

Les suppressions augmentaient peu à peu l'amplitude jusqu'à ce que l'énergie consommée dans les frottements fût égale à celle apportée par l'eau qui s'écoulait de la conduite. La figure 13 donne un exemple de cet établissement de régime.

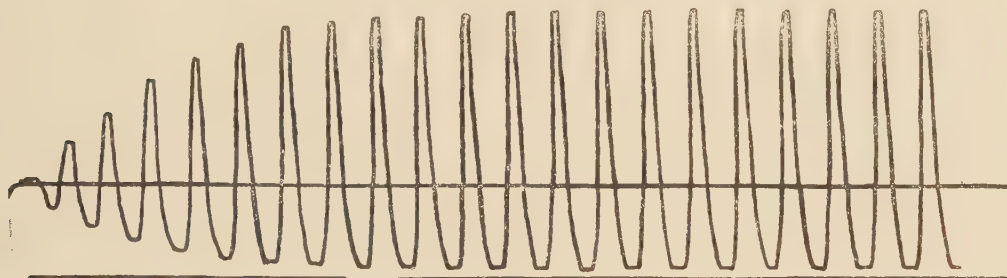


FIG. 13. — Exp. 48. Établissement du régime permanent d'une oscillation entretenue.

L'expérience était recommencée pour divers débits, mesurés par la masse d'eau écoulée en un temps donné : les figures 14 et 15 donnent un exemple des courbes de régime permanent ainsi obtenues pour des débits allant de 2,700 gr. (*fig. 14*,

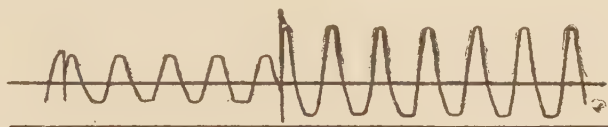


FIG. 14. — Exp. 95 A et B. Oscillations entretenues (en régime permanent) par des débits de 27 cm³ et 47 cm³ par seconde. Poche d'air de 440 cm³ à l'aval.

courbe de gauche) à plus de 20 kgs (*fig. 15*, courbe de droite), passant en 100 secondes dans une conduite de 50 cm² de section.

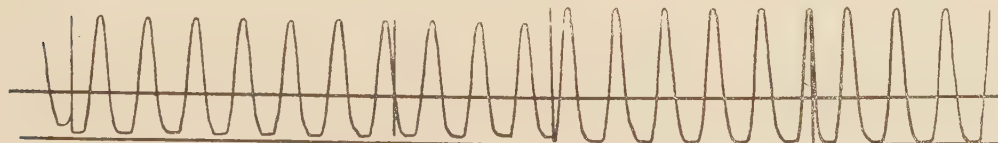


FIG. 15. — Exp. 95 C, D et E. Oscillations entretenues (en régime permanent) avec des débits de 63, 168 et plus de 225 cm³ par seconde. Poche d'air de 440 cm³ à l'aval.

[36] On trouve ainsi les résultats suivants que l'on aura à interpréter :

A) Pour les faibles débits, les courbes sont presque sinusoïdales.

B) Quand le débit croît :

1) La période du phénomène croît assez sensiblement, tout en restant voisine de la période de plus basse fréquence définie plus haut.

2) Les minimums tendent vers la pression atmosphérique, les maxi-

mums vers une limite qui, à partir d'un certain volume de la poche d'air, est indépendante de ce volume.

Voici par exemple les résultats obtenus dans deux séries d'expériences :

Conduite de 80-90.

Charge 17 m.

Longueur 183,76.

Section 50 cm².

N° de l'Expérience.	Volume ramené à pr. atm.	Débit en 100 sec.	Période en sec.	Maximum de surpression (en m. eau).	Minimum de surpression.
96-1	530 cm ³	2400 gr.	1,11	12,2	8,1
96-2		5900	1,16	24,4	13
96-3		8100	1,18	30	14
96-4		11200	1,25	33,5	14,5
97-1	1050	2700	1,43	10	6
97-2		6000	1,55	24	11,5
97-3		17000	1,565	33,8	14
97-4			1,57	35,5	14

[37] 1) VÉRIFICATION DE LA FORMULE $u_0 \xi \operatorname{tg} \xi = \text{Cte.}$ — Nous admettons que la période des petites oscillations intervenant dans les théories du début de ce chapitre est la limite vers laquelle tendent la période des oscillations lorsque le débit tend vers zéro. Voici dès lors les résultats résumés de plusieurs séries de mesures :

Volume en cm ³ de la poche d'air ramenée à la p. at.	Période limite.	Rapport $\frac{T}{\Theta}$	$\xi \operatorname{tg} \xi$	$u_0 \xi \operatorname{tg} \xi \times 10^{-5} \text{ m}^3.$	
340	0,93	0,612	1,34	16,2	} Moyenne : 17,2
530	1,08	0,526	0,895	18	
600	1,18	0,484	0,73	16,5	
890	1,37	0,416	0,50	16,95	
1050	1,43	0,398	0,445	17,6	
1570	1,83	0,319	0,28	16,6	
3030	2,37	0,242	0,15	17,2	

La constance du produit se vérifie à $\frac{1}{22}$ près; ce qui est satisfaisant. Si la concordance est moins nette que pour les pseudo-périodes, cela doit, je pense, être attri-

bué à la longueur relative des expériences sur le mouvement permanent. A titre d'exemple, les mesures de la série 96 rapportées plus haut ont duré plus de 10 minutes; les mesures de débit ont exigé à elles seules plus de 6 minutes. Or l'air se dissout constamment dans l'eau. Sans doute, après l'injection de l'air on attendait bien une dizaine de minutes avant de commencer les mesures, afin que les couches superficielles fussent pratiquement saturées, et lors de la mesure du volume, on interrompait la communication de la poche avec l'éprouvette graduée dès que commençait à arriver l'eau saturée d'air, ce qui décelait un changement de bruit caractéristique.

Néanmoins, une certaine erreur subsiste de ce fait, et il suffirait par exemple d'admettre que dans la série 96 le volume de 530 cm³ comprenait 20 cm³ d'air dissous pour retrouver la moyenne 17,2 des expériences précédentes.

On peut donc, ce me semble, résumer ainsi les résultats expérimentaux :

Dans les mouvements permanents de petite amplitude, tout comme dans les mouvements amortis d'amplitude assez grande, la période d'une conduite munie d'un réservoir d'air à son extrémité aval peut se calculer au moyen de la formule (6).

[38] 2) AMPLITUDE DES OSCILLATIONS ENTRETENUES. — S'il est intéressant de connaître la période d'une conduite, cela tient surtout aux surpressions qui accompagnent les phénomènes de résonance. De Sparre ⁽¹⁾ et Camichel ⁽²⁾ avaient démontré que dans les conduites entièrement purgées les surpressions pouvaient par résonance atteindre le double de la pression statique.

Le dispositif décrit plus haut m'a permis d'effectuer sur une conduite munie d'une poche d'air à son extrémité aval des expériences dont j'ai résumé les résultats expérimentaux.

Une analyse détaillée du phénomène va nous permettre d'interpréter ces résultats et de les préciser ⁽³⁾.

La fermeture initiale du distributeur fait apparaître une compression qui revient au bout d'un certain temps transformée en dépression. A ce moment le distributeur s'ouvre, il se produit une dépression qui s'ajoute à celle déjà existante; quand celle-ci renforcée revient en compression, il y a une nouvelle fermeture, d'où nouvelle compression, et ainsi de suite : *l'amplitude du coup de bélier croît donc jusqu'à une certaine limite.*

Cette limite sera atteinte quand les ouvertures et les fermetures successives n'augmenteront plus le coup de bélier. Il faudra donc que ⁽⁴⁾ lors d'une ouverture

⁽¹⁾ De Sparre, *Houille blanche*, 6 septembre 1907.

⁽²⁾ Camichel, *C. R.* (1916), t. 163, p. 224.

⁽³⁾ Le principe de cette analyse est dû à M. Eydoux qui l'a utilisé dans un travail encore inédit sur les résonances dans les conduites entièrement purgées.

⁽⁴⁾ La limite peut être aussi atteinte si l'énergie apportée par l'écoulement compense

il n'y ait plus d'écoulement, par suite plus de charge; il faudra donc que la dépression soit telle que la pression intérieure au distributeur soit égale à la pression atmosphérique. C'est la propriété que j'ai indiquée plus haut pour les minimums de pression.

Quel est le maximum de pression correspondant à ce minimum? Il résulte immédiatement de la théorie que j'ai donnée plus haut que, dans le mouvement permanent de *petite* amplitude, les pressions en tous les points de la conduite sont en phase à tout instant, *quand le fondamental est établi*. C'est le mouvement stationnaire de l'acoustique. Expérimentalement cela se vérifie, *même pour les grandes amplitudes*, en plaçant un indicateur sur le trajet, et en constatant, par une visée simultanée, qu'il y a en même temps maximum ou minimum aux deux indicateurs.

D'autre part, s'il y avait oscillations en masse, la courbe de la figure 1 permettrait de trouver le maximum de pression z_m correspondant à une dépression $z_0 - h$, ramenant la charge à zéro. Je vais démontrer que ce *maximum z_m est égal au maximum de la pression pour le mouvement d'ensemble qui nous occupe ici* et où les vitesses en tous points ne sont pas nécessairement les mêmes.

L'expérience montre en effet qu'il y a maximum ou minimum de pression en même temps pour toute la conduite. Comme au moment où la pression est stationnaire, on a partout

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

nous devons conclure que la vitesse a alors en tous les points de la conduite la même valeur; cette valeur est nulle en vertu de la relation, valable au distributeur,

$$v = -\frac{\alpha}{S} \frac{d}{dt} \left\{ (y + h)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\}.$$

Donc l'énergie cinétique maximum w de l'eau de la conduite se retrouve *transformée entièrement en énergie potentielle* :

- 1) dans la poche d'air lors d'un maximum de pression;
- 2) dans la charge de mise en chambre lors d'un minimum de pression.

Considérons alors uniquement la poche sans nous préoccuper par quel méca-

exactement celle absorbée par les frottements. Cela n'est d'ailleurs réalisé que pour des débits excessivement faibles, une fraction de litre par minute; l'amplitude de l'oscillation est réduite, mais les résultats généraux subsistent.

nisme elle reçoit ou perd de l'énergie potentielle. Dans la position d'équilibre elle a le volume u_0 sous la pression z_0 .

Mais l'énergie qu'elle perd pour passer de la pression z_0 à la pression h est égale à l'énergie qu'elle gagne pour passer de la pression z_0 à la pression maximum.

Or l'équation (13) du chapitre I donne précisément *les rapports* $\left(\frac{z_m}{z_0}\right) \left(\frac{z_m}{z_0}\right)$ *correspondant à une poche d'air de volume u_0 sous la pression z_0 dans la position d'équilibre et qui est le siège d'oscillations où elle absorbe ou rend une quantité d'énergie égale à w .* Si nous connaissons une des racines de cette équation, nous déterminons du même coup l'autre : z étant égal ici à h , le point à établir se trouve démontré.

[39] Cela étant, que se passera-t-il dans la réalité ?

1) Le phénomène tend à s'amortir. Pour l'entretenir il faudra un écoulement continu : le coup de bélier en résultant entretiendra la résonance. Donc la pression minimum n'atteindra jamais la pression atmosphérique, et cela en raison :

- a) de la surpression à l'entrée du clapet nécessaire à l'entretien des oscillations ;
- b) de la perte de charge dans le clapet (').

2) En raison de la dissolution dans l'eau de la poche au moment des surpressions, le maximum de surpression sera inférieur à celui que l'on calculerait par la méthode précédente.

Tous ces résultats apparaissent sur les tableaux rapportant les expériences des séries 96 et 97, où l'on trouve pour z_m la valeur limite $36 + 27 = 63$ m. correspondant à une valeur de $\frac{z_m}{z_0} = 2,33$, alors que la valeur calculée au moyen de la dépression h aurait donné une valeur de $\frac{z_m}{z_0}$ égale à 2,75.

Influence de volume de la poche d'air.

Il résulte de l'analyse précédente que *la pression limite est indépendante du volume de la poche d'air*, à une condition évidente cependant, c'est qu'au moment de la surpression maximum il y ait encore de l'air. Or quand nous avons une poche de grand volume, les phénomènes de dissolution ont pour effet de diminuer sensiblement les surpressions ; on doit donc conclure que des quantités notables d'air sont dissoutes pendant la compression ; ces quantités étant fonction uniquement de la saturation des couches superficielles et de la pression à un instant donné, il pourra arriver

(') Si même la course du clapet est très limitée, l'écoulement d'eau sera insuffisant pour entretenir des oscillations de grande amplitude, les minimums seront supérieurs à la pression atmosphérique.

que la poche disparaisse au cours de la résonance. C'est ce qui explique les apparences des figures 16 et 17, où on a fait résonner la conduite pendant qu'on évacuait l'air sans toucher au clapet : on aperçoit dans les dernières résonances un phénomène de doublement de la pression statique tout comme dans les conduites entièrement purgées, à quoi se superpose une surpression due à la petite poche, surpression d'autant plus faible que le volume de la poche est plus petit.

Remarques. — 1) Les expériences précédentes permettent de savoir le débit d'eau nécessaire pour entretenir dans une conduite une oscillation d'amplitude déterminée, et par suite de mesurer l'énergie absorbée par amortissement dans la conduite.

2) Nous avons implicitement supposé que le coup de bélier produit par la fermeture initiale du clapet était assez faible pour que, lors de la première dépression, la conduite ait près du distributeur une pression supérieure à la pression atmosphérique. Si cela n'avait pas été réalisé, il y aurait, lors du premier minimum, rentrée d'air par le distributeur, et dégagement d'air dissous dans l'eau de la conduite. Le problème serait alors totalement changé. Il est rare d'ailleurs que de telles éventualités se présentent dans la pratique, les appareils de manœuvre étant prévus pour éviter ces incidents.

Conséquences pratiques.

[40] Je vais, pour terminer cette partie, résumer les conclusions auxquelles je suis arrivé et indiquer leurs conséquences pratiques :

1) La période d'une conduite, munie d'une poche d'air à l'extrémité aval, est comprise entre les valeurs données par Rateau et Allievi et peut se calculer au moyen de la formule (6), où entre d'ailleurs un paramètre γ variant entre 1 et 1,41.

2) Lors de la résonance d'une telle conduite la pression varie depuis la pression atmosphérique jusqu'à une valeur que l'on peut déterminer au moyen de la courbe reproduite dans la figure 1. J'ai raisonné comme si la conduite était munie d'un clapet automatique. On vérifierait sans peine qu'il y a peu de changements à faire quand on considère une conduite commandée par un régulateur. Celui-ci aura beau être ouvert à plein, lors des minimums de pression la conduite cessera de débiter quand les minimums de pression seront égaux à la pression atmosphérique, diminuée éventuellement de l'aspiration. Ce point est intéressant pour les turbines de basse chute pour lesquelles il fixe une limite supérieure à la surpression de résonance.

3) Il serait intéressant d'utiliser les phénomènes de résonance dans les presses à emboutir, où ils permettraient, avec de très faibles débits, d'exercer des surpressions considérables, qu'avec les dispositifs actuels on ne peut obtenir qu'au moyen de grands débits, par suite avec de grandes consommations d'eau.

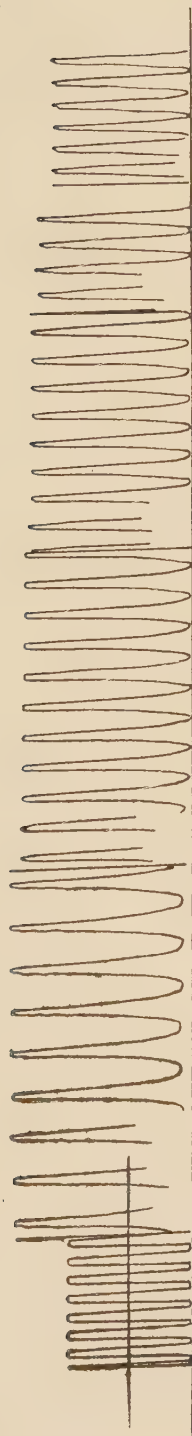


FIG. 16. — Oscillations entretenues dans une conduite munie à l'aval d'une poche d'air que l'on vide progressivement : le maximum de pression diminue en même temps que le volume. A gauche, doublement de pression obtenu dans la conduite entièrement purgée.



FIG. 17. — Suite de l'expérience précédente : quand la poche a un volume négligeable, on retrouve le phénomène du doublement de pression ; mais il reste dans la poche une petite bulle d'air qui donne un crochet caractéristique (à droite).

On vérifierait aisément qu'une chute de 30 mètres donnerait par résonance une surpression de 100 mètres d'eau. La réalisation de ces dispositifs aurait en outre l'avantage d'exercer ces pressions à des intervalles de temps cadencés par le volume de la poche et d'ajouter ainsi l'effet du martelage à celui de l'emboutissage.

III

Nous allons étendre quelques-uns des résultats précédents au cas d'un réservoir d'air situé en un point quelconque d'une conduite à caractéristique unique. Nous désignerons par L_1 la distance du réservoir à l'extrémité amont, par L_2 la distance du réservoir à l'extrémité aval.

Calcul de la période propre.

[41] Appliquons les équations d'Allievi à chacun des deux tronçons de la conduite : l'intégrale générale de chacune des équations contient deux fonctions arbitraires, réduites à une, par les conditions aux limites provenant de la présence de la chambre de mise en charge à l'extrémité amont et du distributeur à l'extrémité aval.

Nous avons au tronçon amont, en comptant les distances à partir de la poche d'air et avec une définition convenable des fonctions F :

$$y = y_0 + F_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + F_2\left(t + \frac{x}{a}\right), \quad v = -\frac{g}{a} \left\{ F_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - F_2\left(t + \frac{x}{a}\right) \right\}.$$

Or, en raison de la présence du réservoir à l'amont,

$$-F_2(t) = F_1\left(t - \frac{2L_1}{a}\right).$$

Donc à la poche d'air on a :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + F_1(t) - F_1\left(t - \frac{2L_1}{a}\right), \\ v &= -\frac{g}{a} \left[F_1(t) + F_1\left(t - \frac{2L_1}{a}\right) \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Prenons maintenant la partie aval et comptons les distances à partir du distri-

buteur. Exprimons que ce dernier a été fermé brusquement et entièrement au temps $t = 0$; nous avons, en appelant G_1 et G_2 les deux fonctions arbitraires relatives à ce tronçon :

$$G_1(t) - G_2(t) = 0.$$

Par suite, on a à la poche d'air :

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + G_1\left(t - \frac{L_2}{a}\right) + G_2\left(t + \frac{L_2}{a}\right), \\ v_2 &= -\frac{g}{a} \left[G_1\left(t - \frac{L_2}{a}\right) - G_2\left(t + \frac{L_2}{a}\right) \right]. \end{aligned}$$

Exprimons maintenant que la pression au niveau de la poche d'air est la même pour les deux tronçons :

$$F_1(t) - F_2\left(t - \frac{2L}{a}\right) = G_1\left(t - \frac{L_1}{a}\right) + G_2\left(t + \frac{L_2}{a}\right). \quad (8)$$

Ceci posé, admettons qu'un régime permanent se soit établi. Supposons même, pour simplifier, que la fonction F soit de la forme $\frac{A}{2} \sin mt$, l'équation (8) montre que $G(t)$ sera de la forme $\frac{B}{2} \cos(mt + \varphi)$, B et φ étant tels que l'on ait, quel que soit t :

$$y - y_0 = A \sin \frac{mL_1}{a} \cos m\left(t - \frac{L_1}{a}\right) = B \cos \frac{mL_2}{a} \cos(mt + \varphi_2). \quad (9)$$

Donc :

$$A \sin \frac{mL_1}{a} = B \cos \frac{mL_2}{a},$$

$$\varphi + \frac{mL_2}{a} = 0.$$

Il nous reste à écrire la condition aux limites imposée par la présence de la poche d'air; on a :

$$v_1 - v_2 = \frac{u_0}{S\gamma z_0} \frac{d}{dt} (y - y_0).$$

Remplaçons dans l'équation précédente v_1 , v_2 , y par leurs valeurs

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + A \sin \frac{mL_1}{a} \cos m \left(t - \frac{L_1}{a} \right), \\ v_1 &= -\frac{g}{a} A \cos \frac{mL_1}{a} \sin m \left(t - \frac{L_1}{a} \right), \\ v_2 &= -\frac{g}{a} B \sin \frac{mL_2}{a} \sin m \left(t - \frac{L_2}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Il vient :

$$A \cos \frac{mL_1}{a} \sin m \left(t - \frac{L_1}{a} \right) - B \sin \frac{mL_2}{a} \sin m \left(t - \frac{L_2}{a} \right) = \frac{mu_0 a}{Sz_0 g \gamma} A \sin \frac{mL_1}{a} \cos m \left(t - \frac{L_2}{a} \right).$$

D'où, en divisant par $A \sin m \left(t - \frac{L_1}{a} \right) \sin \frac{mL_1}{a}$, et en tenant compte de ce que

$$\begin{aligned} A \sin \frac{mL_1}{a} &= B \cos \frac{mL_2}{a}, \\ \cotg \frac{mL_1}{a} - \tg \frac{mL_2}{a} &= \frac{amu_0}{Sz_0 g \gamma}, \end{aligned} \quad (11)$$

La relation précédente donne lieu à différentes remarques :

1) Pour $L_2 = 0$, c'est-à-dire dans le cas d'une poche d'air située à l'aval de la conduite, elle se réduit, comme il était à penser, à la formule (6) du présent chapitre.

2) Pour $L_1 = 0$, c'est-à-dire dans le cas où l'on aurait un réservoir d'air à l'amont de la conduite, l'équation se réduit à

$$- \tg \frac{mL_2}{a} = \frac{amu_0}{Sz_0 g \gamma}.$$

Le second membre étant essentiellement positif, la relation ne peut avoir lieu que si $\tg \frac{mL_2}{a}$ a une valeur négative; cela suppose que le fondamental de la conduite a une période $\frac{2\pi}{m} = \Theta$ inférieure à $\frac{4L_2}{a}$.

En d'autres termes, la période propre de la conduite est plus petite que la période sans poche d'air. C'est un résultat classique en T. S. F., où la présence d'un condensateur à la base d'une antenne a pour effet de diminuer la longueur d'onde de cette dernière.

[42] 3) Supposons maintenant $L_1, L_2 \neq 0$. Considérons (*fig. 13*) :

a) La courbe A ayant pour abscisses $\frac{1}{m} \cotg \frac{mL_1}{a}$ et pour ordonnées Θ ;

b) La courbe B ayant pour abscisses $\frac{1}{m} \lg \frac{mL_2}{a}$ et pour ordonnées Θ .

Menons une parallèle à l'axe des X coupant en α la courbe A et en β la courbe B; quand α sera à la droite de β , le vecteur positif $\beta\alpha$ représentera la quantité $\frac{av_0}{Sz_0\gamma g}$ et donnera par suite le volume u_0 correspondant à une période déterminée; l'opéra-

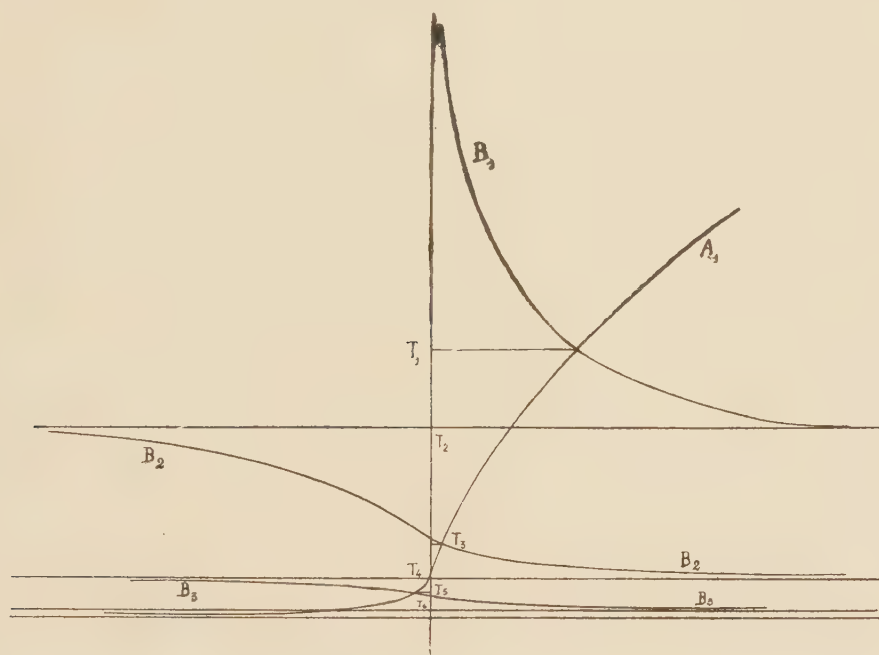


FIG. 18.

tion inverse donnerait la période propre de la conduite pour une poche d'air déterminée.

Je vais discuter en détail un cas particulier dans lequel $L_2 = 3L_1$.

La courbe A se compose d'une série de branches $A^1 A^2 A^3$ de plus en plus rapprochées.

La courbe B comprend les branches $B^1 B^2 B^3$ On voit que pour des valeurs très grandes de la période, il est possible d'appuyer un vecteur $\beta\alpha$ sur les branches $B^1 A^1$.

Donc il sera toujours possible, par un choix convenable du volume u_0 , d'obtenir des oscillations à période suffisamment grande. Faisons décroître la période; le volume u_0 diminue et devient nul pour une valeur T_1 de cette période. Nous avons alors la période sans poche d'air $4 \frac{L_1 + L_2}{a}$ de la conduite.

Au-dessous de T_1 , la branche B^1 étant à la droite de la branche A^1 , il n'est plus

possible d'appuyer un vecteur positif $\beta\alpha$ sur ces branches. Donc les périodes un peu inférieures à T_1 ne peuvent se produire.

Quand la période arrive à la valeur $T_2 = \frac{4L_2}{a}$, la courbe B passe brusquement à l'infini à gauche de l'axe des γ (branche B^*). Il redevient possible d'appuyer un vecteur positif $\beta\alpha$ sur B^* et A.

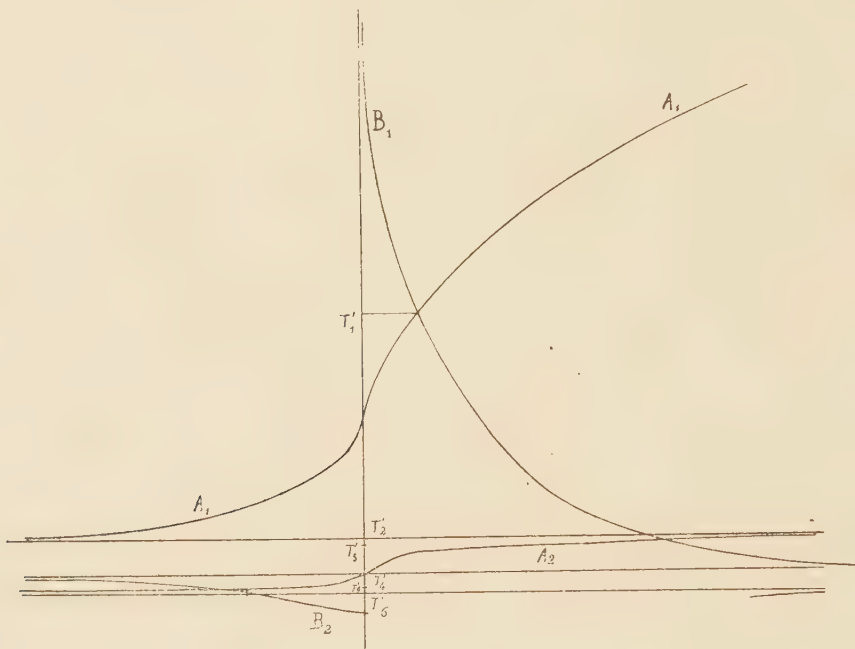


FIG. 19.

Donc un volume très grand de la poche d'air peut donner naissance non seulement à une oscillation de période inférieure à T_1 , mais encore à une oscillation de période inférieure à T_2 .

On verra de même qu'il existe une valeur T_3 de la période correspondant à l'intersection de B^* et de A^* , et telle que les périodes légèrement inférieures à T_3 ne peuvent prendre naissance. On continuerait aisément cette discussion : on voit que les périodes possibles sont comprises dans une série d'intervalles non jointifs (∞_1, T_1) , (T_2, T_3) , limités par les périodes correspondant aux intersections des courbes A et B et par les valeurs de T, pour lesquelles une des courbes passe à l'infini en changeant de signe.

Si nous supposons maintenant $3L_2 = L_1$, on verrait, en se reportant à la figure 19, que sont possibles :

- 1) Les périodes allant de $+\infty$ à $T'_1 = \frac{4L_1 + L_2}{a}$;

2) Cellules allant de $T'_2 = \frac{2L_1 + L_2}{a}$ à T'_3 correspondant à l'intersection de la branche B_1 et de la branche A^2 .

3) Celles allant de T'_4 à T'_5 correspondant à l'intersection de la branche A_2 et de la branche B_2 , et ainsi de suite.

Il est inutile d'insister davantage sur le principe d'une discussion qui se fait aisément dans chaque cas particulier. Je vais continuer l'examen de quelques points résultant de la théorie précédente.

2) La pression le long du tronçon amont est donnée par la formule (où x_1 représente la distance d'un point du tronçon à la poche) :

$$y_1 = A \sin \frac{m(L_1 - x_1)}{a} \cos m \left(t - \frac{L}{a} \right). \quad (12)$$

La pression le long du tronçon aval est donnée par la formule (où x_2 représente la distance d'un point du tronçon au distributeur) :

$$y_2 = B \cos (mt + \varphi) \cos \frac{x_2}{a}. \quad (12')$$

Tenant compte des relations (9), on peut écrire, en changeant l'origine des temps :

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin \frac{m(L_1 + L_2 - x)}{a} \cos mt, \\ y_2 &= A \frac{\sin \frac{mL_1}{a}}{\cos \frac{mL_1}{a}} \cos \frac{x}{a} \cos mt. \end{aligned} \quad (13)$$

Donc dans un régime permanent de petite amplitude les surpressions dans les deux tronçons de la conduite sont ou en phase ou en opposition suivant les signes des facteurs multipliant $\cos mt$; en particulier, pour la période de plus basse fréquence, elles sont toujours en phase.

3) En se reportant aux équations (10 et 11), on voit que si $\cotg \frac{mL_1}{a}$ et $\cotg \frac{mL_2}{a}$ sont de même signe, les vitesses ont même sens à l'amont et à l'aval de la poche; puisque leur différence est positive, c'est le tronçon amont qui débite dans la poche et dans le tronçon aval ou qui en reçoit de l'eau. Si au contraire $\cotg \frac{mL_1}{a}$ et $\cotg \frac{mL_2}{a}$ sont de signes contraires, c'est la poche qui, agissant comme chambre d'eau en charge, reçoit de l'eau des deux tronçons ou débite dans les deux à la fois.

3) Nous pouvons enfin remplacer m par pm , sans que cessent d'être valables les équations (10) et (11). Donc les harmoniques des périodes précédemment trouvées constituent encore des solutions.

Étude expérimentale du phénomène.

Pour mettre en évidence les divers régimes possibles, il fallait placer la poche d'air en un point de la conduite tel que :

- 1) les deux tronçons fussent de périodes nettement différentes;
- 2) les fréquences sans poche d'air ne fussent pas des multiples simples d'une même fréquence; ceci, afin d'éviter que la résonance d'une partie de la conduite n'entraînât la résonance de l'autre. Il m'a paru que ce résultat serait atteint si la poche se trouvait approximativement aux $\frac{3}{11}$ de la conduite à partir de l'extrémité amont. Le point exact se trouvait déterminé par le raccord le plus voisin qui était remplacé par une conduite à partir de l'extrémité amont. Le point exact se trouvait déterminé par le raccord le plus voisin qui était remplacé par le manchon à T portant la poche. Dans les expériences que j'ai montées, cette dernière se trouvait à 50 m. 88 de la chambre de mise en charge, et par suite à 132 m. 78 du distributeur constitué, comme dans les expériences précédentes par un robinet automatique.

La poche étant remplie du volume d'air convenable, on provoquait la résonance de la conduite; le débit était mesuré et on enregistrait les pressions à l'extrémité aval et à la poche d'air. L'inscription simultanée du temps permettait de déterminer la période.

[43] I. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES PÉRIODES. — Nous avons vu (§ 40-41), dans un cas analogue à celui qui nous occupe ici, qu'il y a plusieurs périodes possibles :

La plus grande Θ_1 correspond au cas où le tronçon amont, prolongeant en quelque sorte la chambre de mise en charge, débite dans la poche et dans le tronçon aval. Cette période est supérieure à $\frac{4L_1 + L_2}{a}$.

Une autre période Θ_2 correspond au cas où la poche d'air, coupant la conduite en deux, joue le rôle de chambre d'eau en charge recevant des deux tronçons ou débitant dans les deux. Cette période est inférieure à $\frac{4L_2}{a}$.

D'autres périodes inférieures aux précédentes sont possibles, mais elles arrivent vite à n'être que de quelques centièmes de seconde. Elles ont par suite peu de chance de se produire soit avec des clapets automatiques, qui ont trop d'inertie pour les suivre, soit par suite d'ouvertures et de fermetures cadencées, en raison de la difficulté d'ajuster exactement la cadence à la période de la conduite. En revan-

che, les harmoniques — et particulièrement les premiers harmoniques de Θ_1 — pourront se rencontrer plus facilement. Je dois dire d'ailleurs que je n'ai pu mettre leur présence en évidence que par les dentelures des courbes d'inscription.

Je donne dans le tableau ci-dessous, pour une série de mesures :

1) le volume V_0 de la poche d'air, indiqué en cm^3 sous la pression atmosphérique ;

2) les périodes T_1 et T_2 évaluées en centièmes de seconde et calculées pour $\gamma = 1,13$.

3) les valeurs des périodes mesurées sur les graphiques.

V_0	T_1		T_2	
	Calculé.	Observé.	Calculé.	Observé.
0	56,5	56,9	»	»
355	66	68,3	»	»
450	69	71,5	36	35,2
490	70	72	36,2	»
685	76	78	37	36,8
780	78	82,5	37,5	35
875	82,5	11	38	36,3
1060	86	90	38	{ 35,2 38,5
1460	97	94	38,5	37
»	»	105,2	»	39
1595	100	»	39	39,5
3000	129	128	40	40

Ce tableau appelle les observations suivantes.

[44] 1) La période Θ_2 n'apparaît pas pour les petits volumes où la poche ne peut emmagasiner assez d'eau pour alimenter deux tronçons.

2) Les périodes Θ_1 apparaissent généralement pour les grands débits ; les périodes Θ_2 pour les débits faibles ; je dis généralement, car, si le clapet étant réglé pour un certain débit, on a fait apparaître la période Θ_1 par exemple, on peut, en diminuant progressivement la course du clapet *pendant la marche*, maintenir la période Θ_1 pour un débit qui aurait fait apparaître la période Θ_2 si on l'avait établi dès le début ; il faut d'ailleurs ajouter que seuls les débits moyens sont susceptibles de correspondre à deux périodes : les très grands débits entraînent forcément la période T_1 , et les petits débits correspondent à des résonances de période T_2 .

3) Les périodes Θ_1 et Θ_2 ne sont pas absolument indépendantes du débit : elles croissent légèrement avec celui-ci; c'est ainsi par exemple que pour l'expérience rapportée plus haut et relative au volume de 1460 cm³, on avait :

Débits en cm ³ /sec.	Périodes en centièmes de secondes.
18	37
58	39
81,5	94
90	105

4) Dans les expériences précédentes n'apparaissent que Θ_1 et Θ_2 , et non les périodes inférieures. La vibration de plus basse fréquence était de même la seule à apparaître dans les résonances des conduites avec poche d'air à l'aval. Cela doit être attribué à l'impossibilité pour les robinets automatiques de suivre les vibrations trop rapides qu'entraînerait la production de périodes inférieures.

5) Je dois signaler, quoique j'ai pu produire le fait une seule fois, que dans une expérience avec la conduite munie de la poche entièrement remplie d'eau j'ai obtenu pour la période une valeur de 0,73 seconde, alors que la théorie d'Allievi donne pour $\frac{4(L_1 + L_2)}{a}$ la valeur 0,565 seconde.

L'explication me paraît être la suivante : soit une onde cheminant dans une conduite, dans le sens positif par exemple. Lorsqu'elle arrive à une bifurcation, il se produit ⁽¹⁾ une onde réfléchie se propageant dans la conduite suivant le sens négatif. Cela étant, soit B l'extrémité de la conduite adjacente au distributeur, A l'extrémité de la conduite voisine de la chambre de mise en charge, C le point de jonction de la poche avec la conduite, et supposons une onde de compression effectuant le trajet suivant :

- 1) de B en A en compression ;
- 2) de A en C en dépression ;
- 3) de C en A en dépression ;
- 4) de A en C en compression ;
- 5) de C en A en compression ;
- 6) de A en B en dépression ;
- 7) de B en A en dépression ;
- 8) de A en B en compression.

Au total, l'onde aura effectué un trajet $4(L_1 + L_2) + 4L_1$ égal, dans le cas particulier qui nous occupe ici, à 936 mètres, trajet ayant exigé un temps égal à 72,5 centièmes de secondes. C'est la valeur même trouvée expérimentalement (*fig. 19 bis*).

⁽¹⁾ Poisson, *Mém. Institut* (1819), t. 11, p. 305.



FIG. 19 bis. — Conduite entièrement purgée. La poche (remplie d'eau) est placée à 50^m 86 de l'extrémité amont. Oscillations entretenues par des débits de 19,6 cm³, 59 cm³ et plus de 120 cm³ par seconde; par la courbe de droite la période est passée de 0,565 sec. à 0,73 sec.

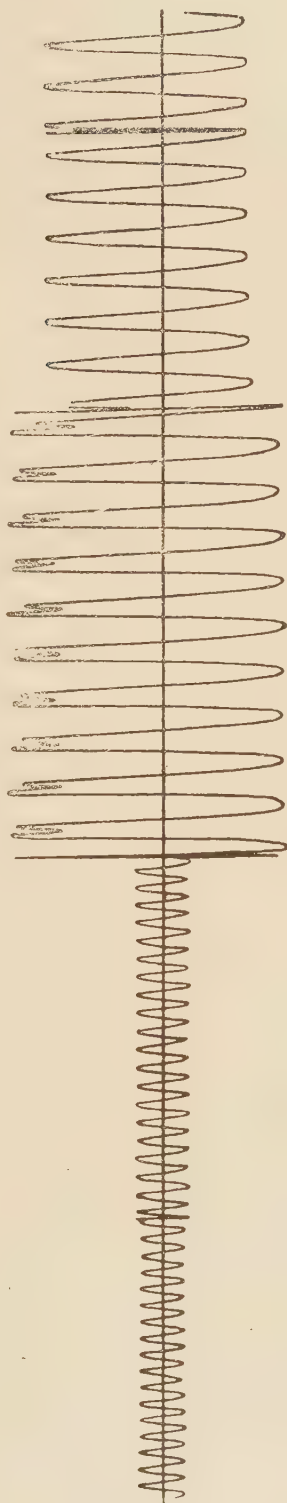


FIG. 20. — Exp. 97 A, 97 B, 97 C, 97 D. Poche de 1460 cm³ à 50^m de l'amont; indicateur à la poche; les deux courbes de gauche correspondent au régime de période Θ_2 : les débits sont de 18 et 58 cm³ par seconde; les deux inscriptions de droite correspondent au régime de période Θ_1 ; les débits correspondant sont respectivement de plus de 100 cm³ et de 82 cm³ par seconde.

[45] II. FORME DES COURBES DE SURPRESSION. — Les courbes de surpression présentent deux aspects complètement différents suivant qu'on a l'un ou l'autre des régimes caractérisés par les périodes Θ_1 ou Θ_2 .

1) Considérons d'abord le cas où la poche d'air joue le rôle de chambre d'eau débitant dans les deux tronçons de la conduite : le phénomène a alors la période Θ_2 .

a) A l'extrémité aval, la pression varie depuis la pression atmosphérique jusqu'à une valeur presque égale au double de la pression statique, et cela quel que soit le débit, dans les limites où la période Θ_2 est susceptible de se maintenir.

b) A la poche d'air, la pression varie suivant une loi presque sinusoïdale, l'amplitude étant sensiblement indépendante du débit (croissant très légèrement avec lui).

Or, il résulte des équations (13) qu'à l'instant t les amplitudes des variations de pression — supposées sinusoïdales — sont :

A la poche d'air,

$$A_p \sin \frac{mL}{a}.$$

Au distributeur,

$$A_q = \frac{A \sin \frac{mL_1}{a}}{\cos \frac{mL_2}{a}}.$$

Donc

$$\frac{A_p}{A_q} = \cos \frac{mL_2}{a}.$$

L'amplitude des variations de pression à la poche tend vers zéro quand la période tend vers $\frac{4L_2}{a}$, ce qui se vérifie sur la courbe correspondant à une poche de 3000 cm³.

Comme dans la plupart des cas, T est voisin de 0,37 sec., on voit que l'amplitude à la poche est voisine de $\frac{1}{4} \gamma_0$.

Expérimentalement, on trouve que l'amplitude est de l'ordre de la moitié ou du tiers de la pression statique (*fig. 20, 21 et 22*).

2) Supposons maintenant que le tronçon amont débite dans la poche d'air et dans le tronçon aval; le phénomène a la période Θ_1 .

a) A l'extrémité aval, la pression varie suivant une loi en gros semblable à celle obtenue pour les conduites avec poche d'air à l'aval : minimums supérieurs ou égaux à la pression atmosphérique; maximums très grands et très aigus, tendant vers une limite supérieure quand le minimum tend vers la pression atmosphérique; cette limite supérieure est de 40 mètres d'eau dans la série ici relatée, plus grande par conséquent que dans le cas des poches situées à l'extrémité aval; cela

doit être attribué à la rapidité plus grande des oscillations qui laisse moins de temps à la dissolution pour s'effectuer.

b) A la poche d'air, la loi de variation est en gros sinusoïdale; toutefois les maximums sont légèrement différents des minimums tantôt plus grands, tantôt plus

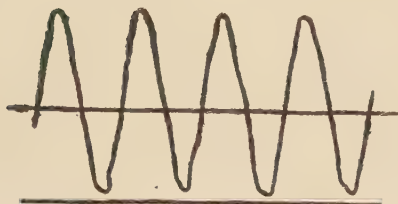


FIG. 21. — Exp. 97 A. Inscription faite à l'aval de la conduite pendant que celle-ci débitait 18 cm^3 par seconde.

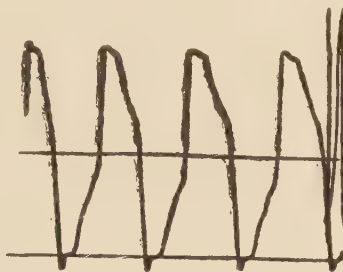


FIG. 22. — Exp. 97 B. Inscription faite à l'aval de la conduite pendant que celle-ci débitait 58 cm^3 par seconde.

petits; le rapport de l'amplitude de l'oscillation, au double de la pression statique, varie entre $1/4$ et $4/5$ (fig. 20, 23 et 24).

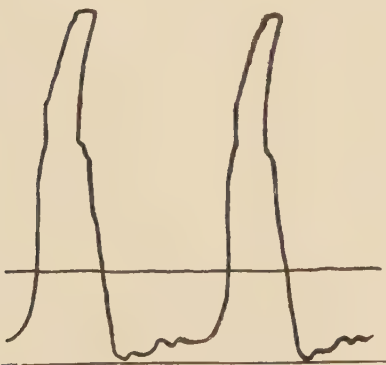


FIG. 23. — Exp. 97 C. Inscription de la pression à l'aval de la conduite pendant que celle-ci débitait plus de 100 cm^3 par seconde de façon désordonnée.



FIG. 24. — 97 C. Inscription de la pression à l'aval de la conduite pendant que celle-ci débitait 82 cm^3 par seconde.

c) On observe en outre des dentelures dues probablement à la présence d'harmoniques d'ordre supérieur.

Passage d'une oscillation à une autre.

[46] De même que dans les tuyaux sonores une variation de débit suffit à faire apparaître l'un ou l'autre des sons que peut donner le tuyau, de même ici, lorsque le débit croît, il arrive un moment où une oscillation se déforme; la figure 25 montre nettement le passage d'une forme de vibration à l'autre : de deux maximums consécutifs on voit l'un d'eux s'allonger, prendre de l'importance par rapport au second qu'il finit généralement par absorber; le second mode de vibration est alors établi.

Il semble en somme que ce passage s'effectue par une sorte de battements entre les deux oscillations, dont la seconde existait en puissance. Il arrive même que ces battements durent fort longtemps : la figure 26 montre un exemple de ce phénomène obtenu avec une poche d'air de 685 cm³ (indicateur placé à la poche); on y aperçoit :

1) A gauche, le début de l'oscillation (trait quittant peu la ligne de pression statique);

2) A droite, les festons produits par les battements auxquels j'ai fait allusion, festons qui se sont prolongés pendant un laps de temps supérieur à 19 minutes, après quoi il y eut un « décrochage » produit par je ne sais quelle cause, et il apparut l'oscillation de plus basse fréquence que j'ai inscrite à la gauche du cliché. Ayant dû arrêter après une révolution effectuée le cylindre enregistreur, j'ai été obligé de superposer le début et la fin du phénomène.

Il semble que l'on prenne là sur le vif l'échange de stabilité entre deux modes différents de vibrations.

Résumé de la troisième partie et conclusions pratiques.

[47] Nous venons de voir l'existence de deux régimes différents d'oscillations dans une conduite pourvue sur son parcours d'un réservoir d'air, régimes différant à la fois par les périodes, par la grandeur des surpressions et par la répartition des vitesses.

A quelles conditions devra répondre un dispositif de protection pour une conduite qui, par sa construction même, possède ou peut posséder une poche d'air en une certaine région où il existe par exemple un point haut? On peut d'abord songer à disposer de la période propre de façon qu'elle soit comprise entre T_1 et T_2 ; mais outre la difficulté de maintenir constant le volume de l'air, il existe dans nos formules un paramètre γ qui ne permet pas une définition précise de la période.



FIG. 25, — Exp. 64. — Passage du premier au second régime.

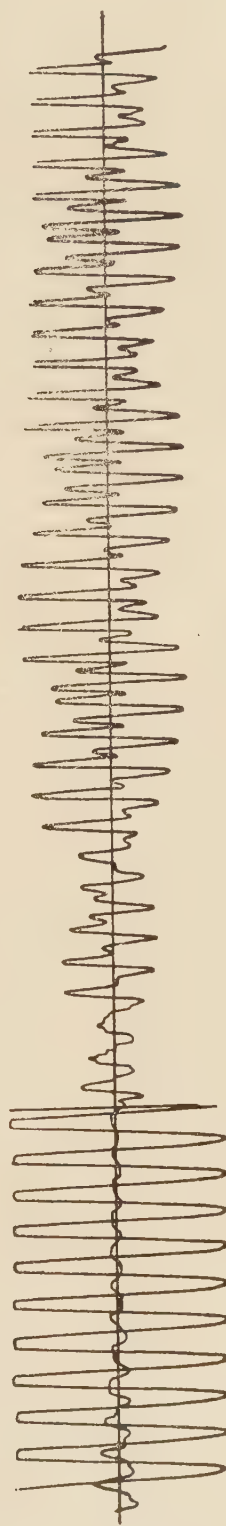


FIG. 26. — Exp. 66. Passage du premier au second régime et battements entre les deux régimes.

Il vaut donc mieux chercher à supprimer un des régimes de vibrations. Or, des courbes de surpressions, il résulte que le régime de période Θ_1 est beaucoup plus dangereux que le régime de période Θ_2 : il faut donc à tout prix que nous obligions le second à s'établir, c'est-à-dire que nous obligions la poche à débiter dans les deux tronçons et spécialement dans le tronçon aval. Cela pourra se faire soit par des ajutages convenablement disposés, du genre par exemple de ceux indiqués au chapitre II, soit même simplement par une disposition convenable de tuyaux aboutissant par exemple au point haut par des coudes. Le rôle des coudes est de briser la direction des jets amont et aval et d'obliger les deux tronçons à communiquer exclusivement par l'intermédiaire de la poche.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

[48] Le travail précédent est une contribution à l'étude des surpressions occasionnées dans les conduites à caractéristique unique par les fermetures brusques et par les résonances. Cette étude n'est pas si particulière qu'elle pourrait le sembler au premier abord. Sans doute on s'efforce dans la pratique de réaliser des fermetures relativement lentes, mais l'exemple des presses à obus montre que l'industrie est parfois amenée à utiliser des fermetures rapides. Si, d'autre part, beaucoup de conduites forcées ont une caractéristique variable, il ne faut pas oublier que la caractéristique unique, sur de grandes portions tout au moins, est de règle dans les canalisations d'eau sous pression ou dans les conduits d'alimentation en eau des villes; sa considération a aussi l'intérêt capital de permettre la séparation de bien des facteurs, chose impossible à réaliser si la caractéristique varie.

L'étude a été généralement menée du point de vue du mouvement par ondes; ce n'est pas d'ailleurs que la théorie de l'oscillation en masse soit à négliger de parti pris; elle m'a permis au contraire d'établir un abaque donnant les suppressions dans les masses d'air chargées de faire volant pour des quantités d'énergie notables (chapitre I), et j'ai établi expérimentalement que, même dans les cas où il n'y avait aucun doute sur la nécessité de faire intervenir les ondes, cet abaque donnait avec suffisamment d'exactitude les surpressions produites par une fermeture brusque (chapitre II) et par les oscillations entretenues (chapitre III, 1^{re} partie), les écarts étant imputables aux complications apportées dans les résonances par la présence simultanée d'eau et d'air.

J'ai étendu aux conduites avec poches d'air le fait — connu pour les conduites entièrement purgées — d'une limite à la surpression lors des résonances et j'ai indiqué comment l'abaque précédent permettait de déterminer cette limite (chapitre III, 2^{me} partie).

En me plaçant au point de vue d'Allievi, j'ai examiné les débuts du coup de bélier dans les conduites munies de petites poches d'air et brusquement fermées, sans insister sur les phénomènes déjà étudiés qu'engendre la fermeture brusque dans les conduites avec gros réservoir. J'ai confirmé expérimentalement que les petites poches d'air peuvent provoquer des surpressions fort dangereuses, et j'ai donné de cela une théorie à l'abri de certaines objections (chapitre II, 2^{me} partie).

La théorie des ondes m'a aussi permis d'établir des formules donnant la période des conduites avec poches d'air, formules que j'ai pu vérifier expérimentalement; j'ai expliqué les raisons de la différence entre les valeurs données respectivement par Rateau et Allievi en montrant que ces valeurs étaient des cas particuliers extrê-

mes de la formule plus générale que j'ai donné au paragraphe 3o. J'ai enfin montré, dans la dernière partie du chapitre III, que lorsque la poche d'air se trouvait sur le trajet de la conduite, il y avait deux familles de vibrations possibles, correspondant à deux régimes nettement distincts, -différant à la fois par la répartition des vitesses et par l'allure des surpressions.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

L'électrolyse dans la métallurgie du fer.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 10 février 1920.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

F. HOUSSAY.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Paris, le 10 février 1920.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

L. POINCARÉ

